

# 目 录

序.....	( 1 )
第一篇 可数状态的时齐的马尔可夫链.....	( 3 )
§ 1. $P$ 链的概率空间, 存在性定理.....	( 3 )
§ 2. $P$ 链的几个特征数.....	( 7 )
§ 3. 状态的分类及判别准则 .....	( 14 )
§ 4. 遍历性定理及状态的区分 .....	( 24 )
§ 5. 例子 .....	( 43 )
§ 6. 位势理论简介 .....	( 57 )
§ 7. 转移阵的可逆性 .....	( 66 )
§ 8. 马尔可夫链的泛函的极限分布 .....	( 76 )
第二篇 可数状态的时齐的马尔可夫过程.....	( 95 )
§ 1. $P$ 过程的概率空间, 存在性定理.....	( 95 )
§ 2. 有限维的转概阵的分析理论 .....	( 98 )
§ 3. 转概阵的分析理论 .....	( 103 )
§ 4. 准转概阵的分析理论 .....	( 125 )
§ 5. 生灭过程 .....	( 175 )
§ 6. 分枝过程 .....	( 198 )
第三篇 非时齐的准转概阵的分析理论.....	( 213 )
§ 1. 连续性及可微性 .....	( 213 )
§ 2. 一致可微性及柯氏方程式 .....	( 231 )
§ 3. 非时齐的 $Q$ -过程的存在性 .....	( 241 )
§ 4. 非时齐的 $Q$ -过程的唯一性 .....	( 258 )
参考文献 .....	( 262 )

## 序

马尔可夫过程论是概率论的一个重要方面，也是目前国内外学者非常重视的一个数学分枝。可数状态的马尔可夫过程，不仅是一般状态马尔可夫过程的重要特例，而且还有它处理问题的特殊方法。基于此，作者才写作此书。

本书侧重可数状态的马尔可夫过程的分析理论，而对轨道理论，涉及较少。为了全书的系统性，在内容上，既包含了作者自己的部分研究成果，也收集了前辈在这方面的有关结果，特别是作者的老师——许宝騄教授生前领导的讨论班的部分结果。

严士健教授及北京师范大学许多同志对本书曾提出过许多宝贵意见，作者在此一并致谢。

由于作者学识浅薄，本书缺点错误在所难免，敬请不吝指教，以期改进。

胡迪鹤

1982年于武汉大学



# 第一篇 可数状态的时齐的马尔可夫链

## § 1. $P$ 链的概率空间, 存在性定理

设  $T = \{0, 1, 2, \dots\}$  为时间参数集,  $E$  为任一可数集 (不妨令之为非负整数集)。再设  $P = (p_{i,j}, i, j \in E)$  是  $E$  上的转移阵, 即是  $P$  满足

$$(1) \quad p_{i,j} \geq 0, \quad (i, j \in E);$$

$$(2) \quad \sum_{j \in E} p_{i,j} = 1, \quad (i \in E).$$

令  $\Omega^*$  是乘积空间  $E^T = \prod_{t \in T} E_t$ ,  $E_t = E$ ,  $(t \in T)$ ,  $\Omega^*$  中元素用  $\omega = (\omega(0), \omega(1), \omega(2), \dots)$  表之。任取  $A \subset E$ , 记

$$\left[ \begin{smallmatrix} n \\ A \end{smallmatrix} \right] = \{\omega \mid \omega(n) \in A\}, \text{ 特别地, 若 } A \text{ 是 } E \text{ 中单点集 } \{j\}, \text{ 则记}$$

$$\left[ \begin{smallmatrix} n \\ A \end{smallmatrix} \right] = \left[ \begin{smallmatrix} n \\ j \end{smallmatrix} \right]. \text{ 若 } A_1, A_2, \dots, A_n \subset E, \text{ 则记 } \bigcap_{k=1}^n \left[ \begin{smallmatrix} i_k \\ A_k \end{smallmatrix} \right] = \left[ \begin{smallmatrix} i_1, \dots, i_n \\ A_1, \dots, A_n \end{smallmatrix} \right].$$

令  $\mathcal{F}^* = \sigma\left(\left[ \begin{smallmatrix} n \\ j \end{smallmatrix} \right], n \geq 0, j \in E\right)$  为  $\left\{\left[ \begin{smallmatrix} n \\ j \end{smallmatrix} \right], n \geq 0, j \in E\right\}$  所产生的  $\sigma$  代数。再定义:

$$P^i\left(\left[ \begin{smallmatrix} 0, 1, \dots, n \\ i_0, i_1, \dots, i_n \end{smallmatrix} \right]\right) = \delta_{i,i_0} p_{i_0,i_1} \cdots p_{i_{n-1},i_n}, \text{ 其中 } \delta_{i,j} \text{ 当 } i=j \text{ 时}$$

为1否则为0。用柯尔莫哥洛夫定理,  $P^i$  可以唯一地扩张到  $\mathcal{F}^*$  上去而得一概率测度。总之我们得到概率空间  $(\Omega^*, \mathcal{F}^*, P^i)$ ,  $(i \in E)$ 。

再定义一族由  $\Omega^*$  到  $\Omega^*$  的推移算子  $\theta_n (n \geq 0)$  如下: 任取  $\omega \in \Omega^*$ , 定义  $(\theta_n \omega)(m) = \omega(n+m)$ ,  $(m \geq 0)$ . 显然: (1)  $\theta_n^{-1} \begin{bmatrix} m \\ A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m+n \\ A \end{bmatrix}$ ,  $(m, n \geq 0, A \subset E)$ , 从而 (2)  $\theta_n^{-1} \mathcal{F}^* \subset \mathcal{F}^*$ ,  $(n \geq 0)$ .  $(\theta_n^{-1} \mathcal{F}^*$  定义为:  $\{A: A = \theta_n^{-1}(A^*), A^* \in \mathcal{F}^*\}$ .)

任取  $J \in \mathbf{T}$ , 记  $E^J = \bigtimes_{i \in J} E_i$ ,  $(E_i = E)$ , 特别地记  $E^n = \bigtimes_{i=1}^n E_i$ . 对任意  $A \subset E^n$ , 记  $\begin{pmatrix} t_1, \dots, t_n \\ A \end{pmatrix} = \left[ \begin{pmatrix} t_1, \dots, t_n \\ A \end{pmatrix} \right] = \{ \omega | \omega \in \Omega^*, (\omega(t_1), \dots, \omega(t_n)) \in A \}$ . 为简便计, 有时记  $P^i(A \cap B)$  为  $P^i(A, B)$ ,  $\begin{bmatrix} n \\ A \end{bmatrix} = \frac{n}{A}$ .

对  $(\Omega^*, \mathcal{F}^*, P^i)$ , 有下述马尔可夫性:

$$\begin{aligned} (M): \quad P^i \left( \begin{pmatrix} 0, 1, \dots, n-1 \\ A \end{pmatrix}, \frac{n}{j}, \theta_{n+1}^{-1} B \right) \\ = P^i \left( \begin{pmatrix} 0, 1, \dots, n-1 \\ A \end{pmatrix}, \frac{n}{j} \right) P^j(\theta_i^{-1} B). \end{aligned} \quad (1.1)$$

(其中  $i \in E$ ,  $n \geq 1$ ,  $A \subset E^n$ ,  $B \in \mathcal{F}^*$ ,  $j \in E$ ).

**证** 由于  $E^n$  是可数集, 故只须证明 (1.1) 对  $A = (i_0, i_1, \dots, i_{n-1})$  成立即可. 若  $B = \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}$ ,  $(m \geq 0, k \in E)$ , 则

$$\begin{aligned} P^i \left( \begin{pmatrix} 0, 1, \dots, n-1 \\ A \end{pmatrix}, \frac{n}{j}, \theta_{n+1}^{-1} B \right) \\ = P^i \left( 0, 1, \dots, n-1, n, n+1+m \right. \\ \left. i_0, i_1, \dots, i_{n-1}, j, k \right) \\ = P^i \left( 0, 1, \dots, n-1, n \right. \\ \left. i_0, i_1, \dots, i_{n-1}, j \right) P^j \left( \begin{bmatrix} m+1 \\ k \end{bmatrix} \right) \\ = P^i \left( \begin{pmatrix} 0, 1, \dots, n-1 \\ A \end{pmatrix}, \frac{n}{j} \right) P^j(\theta_i^{-1} B). \end{aligned}$$

易证使 (1.1) 成立的  $B$  成  $\sigma$  代数, 所以对任何  $B \in \mathcal{F}^*$ , (1.1) 成立。

由 (M) 可推出,

$$\begin{aligned} (M_1): \quad P^i(\theta_{n+1}^{-1}B \mid (0, 1, \dots, n-1), \underset{A}{\overset{n}{j}}) \\ = P^j(\theta_1^{-1}B), \end{aligned} \quad (1.2)$$

(其中  $i \in E$ ,  $n \geq 1$ ,  $j \in E$ ,  $A \subset E^n$ ,  $B \in \mathcal{F}^*$ ,  $P^i((0, 1, \dots, n-1), \underset{A}{\overset{n}{j}}) > 0$ ), 此处  $P^i(M|A)$  表  $M$  在条件  $A$  下的条件概率。

特别地, 取  $A = E^n$ , (1.2) 化为

$$P^i(\theta_{n+1}^{-1}B \mid \cdot) = P^j(\theta_1^{-1}B). \quad (1.2)'$$

(1.2) 的直观意义是: 知道“现在”, “过去”和“将来”无关。这就是通常的马尔可夫性。若令  $X_n$  是  $\Omega^*$  上的坐标函数, 即是  $X_n(\omega) = \omega(n)$ , ( $\omega \in \Omega^*$ ,  $n \in \mathbf{T}$ ), 则称  $X = (\Omega^*, \mathcal{F}^*, X_n, \theta_n, P^i)$ , ( $i \in E$ ) 为  $P$  链,  $(\Omega^*, \mathcal{F}^*, P^i)$  ( $i \in E$ ) 为  $P$  链的概率空间。

**定义 1.1.** 设  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  是任一概率空间,  $E$  为可数集,  $\mathbf{T} = \{0, 1, 2, \dots\}$  为时间参数集,  $\{X_n, n \in \mathbf{T}\}$  是一族定义在  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  取值于  $E$  的随机变量, (即是对任何  $n \in \mathbf{T}$ ,  $j \in E$ , 有  $\{X_n = j\} \in \mathcal{F}$ ), 如果对任意的  $n \geq 2$ ,  $0 \leq t_1 < \dots < t_n$ , 及任意  $i_1, \dots, i_n \in E$ , 均有

$$\begin{aligned} P(X_{t_n} = i_n \mid X_{t_1} = i_1, \dots, X_{t_{n-1}} = i_{n-1}) \\ = P(X_{t_n} = i_n \mid X_{t_{n-1}} = i_{n-1}), \end{aligned} \quad (1.3)$$

(当 (1.3) 左边有意义时), 则称  $\{X_n, n \in \mathbf{T}\}$  是一个离散时间可数状态的马尔可夫过程, 简称可数状态的马尔可夫链。  $E$  称为其状态空间。如果存在一个转移阵  $P = (p_{i,j}, i, j \in E)$ , 使

$$P(X_n = j \mid X_{n-1} = i) = p_{i,j}, \quad (i, j \in E),$$

(当左边有意义时), 则称  $\{X_n, n \in \mathbf{T}\}$  是具有时齐的转移概率的可数状态的马尔可夫链, 简称可数状态的时齐的马尔可夫链。本章所研究的, 都是这类马尔可夫链。  $P$  称为  $\{X_n, n \in \mathbf{T}\}$  的转移阵,  $\{P(X_0 = i), i \in E\}$  称为其初始分布。

容易证明: (1.3) 等价于下述两条件中任何一条:

$$\begin{aligned} (1) \quad P(X_n = i_n \mid X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}) \\ = P(X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1}), \end{aligned} \quad (1.4)$$

$(n \geq 1, i_0, i_1, \dots, i_n \in E);$

$$(2) P(X_{t_v} = i_v, n \leq v \leq n+m | X_{t_v} = i_v, 1 \leq v < n)$$

$$= P(X_{t_v} = i_v, n \leq v \leq n+m | X_{t_{v-1}} = i_{v-1}), \quad (1.5)$$

$(n \geq 0, 0 \leq t_1 < \dots < t_n < \dots < t_{n+m}, t_v \in T, i_1, \dots, i_{n+m} \in E).$

**定理1.1.** (存在性定理). 设 $E$ 为可数集,  $T = \{0, 1, \dots\}$ ,  $P = (p_{ij}, i, j \in E)$ 是转移阵,  $\{\mu_i, i \in E\}$ 是一个概率分布(即 $\mu_i \geq 0$ ,  $\sum_{i \in E} \mu_i = 1$ ), 则恒存在一个概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P^*)$ 及定义在其上的以 $E$ 为状态空间以 $P$ 为转移阵以 $\{\mu_i\}$ 为初始分布的可数状态的时齐的马尔可夫链 $\{X_n, n \in T\}$ .

**证** 如前构造 $P$ 链 $(\Omega^*, \mathcal{F}^*, X_n, \theta_n, P^i), (i \in E)$ . 若令  $P^*(A) = \sum_{i \in E} \mu_i P^i(A) (A \in \mathcal{F}^*)$ , 则 $P^*$ 是 $\mathcal{F}^*$ 上的概率测度, 而且 $\{X_n, n \in T\}$ 是定义在 $(\Omega^*, \mathcal{F}^*, P^*)$ 上的以 $E$ 为状态空间以 $P$ 为转移阵以 $\{\mu_i\}$ 为初始分布的可数状态的时齐的马尔可夫链。

**附注1.1.** 本定理中构造的概率空间 $(\Omega^*, \mathcal{F}^*, P^*)$ 称为以 $P$ 为转移阵以 $\mu = \{\mu_i\}$ 为初始分布的马尔可夫链概率空间, 特别地若 $\mu$ 集中在 $i$ , (即 $\mu_j = \delta_{ij}, j \in E$ ), 则 $(\Omega^*, \mathcal{F}^*, P^*)$ 就是 $(\Omega^*, \mathcal{F}^*, P^i)$ . 若 $(\Omega^*, \mathcal{F}^*, X_n, \theta_n, P^i), (i \in E)$ 是 $P$ 链, 则对任何 $i \in E, \{X_n, n \geq 0\}$ 是概率空间 $(\Omega^*, \mathcal{F}^*, P^i)$ 上的以 $P$ 为转移阵的初始分布集中在 $i$ (即 $P^i(X_0 = i) = 1$ )的可数状态的时齐的马尔可夫链。故 $P$ 链实给出一族可数状态的时齐的马尔可夫链。

**定义1.2.** 如两马尔可夫链具有相同的初始分布及转移阵(自然地状态空间也相同)则称之为等价的。

按此等价关系, 可以把马尔可夫链分成一些等价类; 两马尔可夫链属于同一个等价类的充要条件是它们具有相同的初始分布与转移阵。仅与初始分布及转移阵有关的性质称为分析性质。如果只研究马尔可夫链的分析性质, 则从马尔可夫链概率空间 $(\Omega^*, \mathcal{F}^*, P^*)$ 出发, 特别地从 $(\Omega^*, \mathcal{F}^*, P^i)$ 出发即可。

## § 2. $P$ 链的几个特征数

令  $\mathcal{T} = \{0, 1, \dots\}$ ,  $E$  为可数集,  $P$  为  $E$  上之转移阵,  $(\Omega^*, \mathcal{F}^*, P^i)$  是如 § 1 所定义的  $P$  链概率空间,  $(i \in E)$ .

1.  $n$  步转移概率  $p_{ij}^{(n)}$ ,  $(n \geq 0)$

令  $p_{ij}^{(n)} = P^i\left(\left[\begin{smallmatrix} n \\ j \end{smallmatrix}\right]\right)$ ,  $(i, j \in E, n \geq 0)$ , 由  $P^i$  的定义易证  $p_{ij}^{(n)}$   
 $= \sum_{i_1, \dots, i_{n-1} \in E} p_{i, i_1} p_{i_1, i_2} \cdots p_{i_{n-1}, j}$ ,  $(n \geq 2)$ ,  $p_{ij}^{(1)} = p_{i, j}$ ,  $p_{ij}^{(0)} = \delta_{i, j}$ .

所以  $P^n = P^{(n)} \equiv (p_{ij}^{(n)}), i, j \in E$ . (此处  $P^n$  表转移阵  $P$  的  $n$  次幂).

2. 由  $i$  出发时刻  $n$  初到  $j$  的概率  $f_{ij}^{(n)}$ ,  $(n \geq 1)$

令  $f_{ij}^{(n)} = P^i\left(\left[\begin{smallmatrix} 1, \dots, n-1, n \\ \bar{j}, \dots, \bar{j}, j \end{smallmatrix}\right]\right)$ , 其中  $\bar{j} = E - \{j\}$ ,  $(n > 1)$ ,

$f_{ij}^{(1)} = p_{ij}^{(1)} = p_{i, j}$ .

3. 由  $i$  出发经有限步到  $j$  的概率  $f_{i, j}$

令  $f_{i, j} = P^i\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\begin{smallmatrix} n \\ j \end{smallmatrix}\right]\right)$ , 显然  $f_{i, j} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$ .

4. 初返时间  $T_j(\omega)$

令

$$T_j(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{若 } \omega \in \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ j \end{smallmatrix}\right], \\ n, & \text{若 } \omega \in \left[\begin{smallmatrix} 1, 2, \dots, n-1, n \\ \bar{j}, \bar{j}, \dots, \bar{j}, j \end{smallmatrix}\right], (n > 1), \\ \infty, & \text{若 } \omega \in \left[\begin{smallmatrix} 1, 2, \dots \\ \bar{j}, \bar{j}, \dots \end{smallmatrix}\right], \end{cases}$$

则  $T_j$  是定义在  $(\Omega, \mathcal{F}, P^i)$  上的取值于  $\{1, 2, \dots; \infty\}$  的随机变量, 其概率分布为:

$P^i(T_j = n) = f_{ij}^{(n)}$ ,  $(n \geq 1)$ ,  $P^i(T_j = \infty) = 1 - f_{i, j}$ .



## 5. 平均再现时间 $m_{i,i}$

令

$$m_{i,i} = \begin{cases} \infty, & \text{若 } f_{i,i}^{(1)} < 1, \\ \sum_{n=1}^{\infty} f_{i,i}^{(n)} n, & \text{若 } f_{i,i}^{(1)} = 1, \end{cases}$$

$m_{i,i}$  是由  $i$  出发初返  $i$  的平均时间, 注意: 即使  $f_{i,i}^{(1)} = 1$ ,  $m_{i,i}$  也可能为  $\infty$ 。

## 6. 无穷多次返回 $j$ 的概率 $g_{i,j}$

$$\text{令 } g_{i,j} = P^i \left( \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} \left[ \begin{smallmatrix} n \\ j \end{smallmatrix} \right] \right).$$

下面我们研究这些特征数之间的关系。

**命题 2.1.**  $g_{i,j} = f_{i,i}^{(1)} g_{i,j}$ .

$$\begin{aligned} \text{证 } g_{i,j} &= P^i \left( \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} \left[ \begin{smallmatrix} n \\ j \end{smallmatrix} \right] \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P^i \left( \left[ \begin{smallmatrix} 1 \\ j \end{smallmatrix}, \dots, \begin{smallmatrix} k-1 \\ j \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} k \\ j \end{smallmatrix} \right], \right. \\ &\quad \left. \bigcap_{m=k+1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} \left[ \begin{smallmatrix} n \\ j \end{smallmatrix} \right] \right), \end{aligned}$$

用 (1.1) 即得:

$$\begin{aligned} g_{i,j} &= \sum_{k=1}^{\infty} P^i \left( \left[ \begin{smallmatrix} 1 \\ j \end{smallmatrix}, \dots, \begin{smallmatrix} k-1 \\ j \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} k \\ j \end{smallmatrix} \right] \right) P^i \left( \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} \left[ \begin{smallmatrix} m \\ j \end{smallmatrix} \right] \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} f_{i,i}^{(k)} g_{i,j} = f_{i,i}^{(1)} g_{i,j}. \end{aligned}$$

**命题 2.2.**  $p_{i,j}^{(n)} = \sum_{v=1}^n f_{i,i}^{(v)} p_{i,j}^{(n-v)}, (n \geq 1)$ , 若令  $P_{i,j}(\lambda) =$

$\sum_{n=0}^{\infty} p_{i,j}^{(n)} \lambda^n, F_{i,j}(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{i,i}^{(n)} \lambda^n$  分别为  $\{p_{i,j}^{(n)}, n \geq 0\}$  和  $\{f_{i,i}^{(n)}\}$ ,

$n \geq 1$  的母函数, 则还有

$$P_{i,j}(\lambda) = \delta_{i,j} + F_{i,j}(\lambda)P_{i,j}(\lambda), \quad (|\lambda| < 1),$$

特别地取  $i=j$ , 则有

$$P_{j,j}(\lambda) = 1 + F_{j,j}(\lambda)P_{j,j}(\lambda), \quad (|\lambda| < 1),$$

或

$$P_{j,j}(\lambda) = \frac{1}{1 - F_{j,j}(\lambda)}, \quad (|\lambda| < 1).$$

**证** 用(1.1)即得:

$$\begin{aligned} p_{i,j}^{(n)} &= P^{(i)}\left(\left[\begin{matrix} n \\ j \end{matrix}\right]\right) \\ &= \sum_{v=1}^n P^{(i)}\left(\left[\begin{matrix} 1 & \cdots & v-1 & v \\ j & \cdots & j & j \end{matrix}\right], \left[\begin{matrix} n \\ j \end{matrix}\right]\right) \\ &= \sum_{v=1}^n P^{(i)}\left(\left[\begin{matrix} 1 & \cdots & v-1 & v \\ j & \cdots & j & j \end{matrix}\right]\right) P^{(j)}\left(\left[\begin{matrix} n-v \\ j \end{matrix}\right]\right) \\ &= \sum_{v=1}^n f_{i,j}^{(v)} p_{j,j}^{(n-v)}. \end{aligned}$$

**命题2.3.**  $f_{i,j}^* = \sum_{n=1}^{\infty} f_{i,j}^{(n)} = F_{i,j}(1) = \lim_{\lambda \rightarrow 1-0} F_{i,j}(\lambda);$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{i,j}^{(n)} = \lim_{\lambda \rightarrow 1-0} P_{i,j}(\lambda).$$

**证** 第一式甚为显然。至于第二式, 由于  $\lim_{\lambda \rightarrow 1-0} P_{i,j}(\lambda) \geq$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1-0} \sum_{n=0}^N p_{i,j}^{(n)} \lambda^n = \sum_{n=0}^N p_{i,j}^{(n)}, \quad (N \geq 0), \text{ 故 } \lim_{\lambda \rightarrow 1-0} P_{i,j}(\lambda) \geq$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{i,j}^{(n)}.$$

而大于号不可能成立, 从而  $\lim_{\lambda \rightarrow 1-0} P_{i,j}(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{i,j}^{(n)}.$

**命题2.4.**  $\sum_{n=0}^{\infty} p_{i,j}^{(n)} = \frac{1}{1 - f_{j,j}^*}, \quad (\text{约定 } \frac{1}{0} = \infty);$

$$m_{i,j} = \begin{cases} \infty, & \text{若 } f_{i,j} < 1, \\ F'_{i,j}(1), & \text{若 } f_{i,j} = 1. \end{cases}$$

证 由命题2.2、2.3立得命题2.4。

命题2.5. 若  $g_{i,i} = 1$ ,  $f_{i,j} > 0$ , 则  $g_{i,j} = 1$ .

$$\begin{aligned} \text{证 } g_{i,j} &= P^i \left( \bigcap_{s=1}^{\infty} \bigcup_{t=1}^{\infty} \left[ \frac{n}{j} \right] \right) \\ &\geq P^i \left( \bigcap_{s=1}^{\infty} \bigcup_{t=1}^{\infty} \left[ \frac{n}{j} \right], \bigcap_{s=1}^{\infty} \bigcup_{t=1}^{\infty} \left[ \frac{t}{i} \right] \right) \\ &= P^i \left( \bigcap_{s=1}^{\infty} \bigcup_{t=1}^{\infty} \left[ \frac{t}{i} \right] \right) - P^i \left( \bigcap_{s=1}^{\infty} \bigcup_{t=1}^{\infty} \left[ \frac{t}{i} \right], \right. \\ &\quad \left. \bigcup_{s=1}^{\infty} \bigcap_{t=1}^{\infty} \left[ \frac{n}{j} \right] \right) \\ &= g_{i,i} - \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{s \rightarrow \infty} P^i \left( \bigcup_{t=1}^{\infty} \left[ \frac{t}{i} \right], \bigcap_{s=m}^{\infty} \left[ \frac{n}{j} \right] \right). \end{aligned}$$

但是, 当  $s > m > 0$  时, 用(1.1)有:

$$\begin{aligned} &P^i \left( \bigcup_{t=1}^{\infty} \left[ \frac{t}{i} \right], \bigcap_{s=1}^{\infty} \left[ \frac{n}{j} \right] \right) \\ &\leq \sum_{t=1}^{\infty} P^i \left( \left[ \frac{s}{i}, \dots, \frac{t-1}{i}, \frac{t}{i} \right], \bigcap_{s=1}^{\infty} \left[ \frac{n}{j} \right] \right) \\ &\leq \sum_{t=1}^{\infty} P^i \left( \left[ \frac{m}{j}, \dots, \frac{s-1}{j}, \frac{s}{j}, \dots, \frac{t-1}{i}, \frac{t}{i} \right], \right. \\ &\quad \left. \bigcap_{s=1}^{\infty} \left[ \frac{n}{j} \right] \right) \\ &= \sum_{t=1}^{\infty} P^i \left( \left[ \frac{m}{j}, \dots, \frac{s-1}{j}, \frac{s}{j}, \dots, \frac{t-1}{i}, \frac{t}{i} \right] \right) (1 - f_{i,j}) \\ &\leq P^i \left( \bigcup_{t=1}^{\infty} \left[ \frac{t}{i} \right], \bigcap_{s=1}^{\infty} \left[ \frac{n}{j} \right] \right) (1 - f_{i,j}). \end{aligned}$$

在上述不等式中先令  $s \rightarrow \infty$  次令  $m \rightarrow \infty$  即得:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{s \rightarrow \infty} P^i \left( \bigcup_{i=1}^s \left[ \frac{i}{m} \right], \bigcap_{j=1}^m \left[ \frac{j}{s} \right] \right) \\ \leq (1 - f_{i,j}^*) \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{s \rightarrow \infty} P^i \left( \bigcup_{i=1}^s \left[ \frac{i}{m} \right], \bigcap_{j=1}^m \left[ \frac{j}{s} \right] \right).$$

由  $(1 - f_{i,j}^*) < 1$  即得  $g_{i,j} = g_{i,j}^* = 1$ .

**引理 2.1.** 设  $\{a_n, n \geq 0\}$  是非负实数序列, 且非全零, 再设实数序列  $\{b_n, n \geq 0\}$  有极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ , ( $b$  可以是  $\pm \infty$ ), 若

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( a_n / \sum_{v=0}^n a_v \right) = 0$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{v=0}^n a_v b_{n-v}}{\sum_{v=0}^n a_v} = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n. \quad (2.1)$$

**证** 由假设总有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{v=n-N+1}^n a_v}{\sum_{v=0}^n a_v} = 0, \quad (\text{一切 } N > 0). \quad (2.2)$$

(1) 先设  $b$  是有限数, 则对任给  $\varepsilon > 0$ , 总存在正整数  $N = N(\varepsilon)$ , 及  $B$ , 使  $|b_n - b| < \varepsilon$  ( $n \geq N$ ),  $|b_n - b| \leq B$  (一切  $n$ ), 所以

$$\left| \sum_{v=0}^n a_v (b_{n-v} - b) \right| \leq \left( \sum_{v=0}^{n-N} a_v \right) \varepsilon + \left( \sum_{v=n-N+1}^n a_v \right) B, \quad (n \geq N), \text{ 把}$$

上式除以  $\sum_{v=0}^n a_v$  再令  $n \rightarrow \infty$  并用 (2.2) 即得

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\sum_{\nu=0}^n a_\nu b_{n-\nu}}{\sum_{\nu=0}^n a_\nu} - b \right| \leq \varepsilon.$$

由  $\varepsilon$  之任意性立得 (2.1)。

(2) 再设  $b$  为无穷大, 不失普遍性可令  $b = +\infty$ , 于是任给  $M > 0$ , 存在  $N = N(M)$ , 使  $b_n \geq M$  (当  $n \geq N$ ), 所以

$$\sum_{\nu=0}^n a_\nu b_{n-\nu} \geq \left( \sum_{\nu=0}^N a_\nu \right) M + \left( \sum_{\nu=n-N+1}^n a_\nu \right) \left( \min_{0 \leq s \leq N} b_s \right). \quad \text{把}$$

上式除以  $\sum_{\nu=0}^n a_\nu$  再令  $n \rightarrow \infty$  并用 (2.2) 即得

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{\nu=0}^n a_\nu b_{n-\nu}}{\sum_{\nu=0}^n a_\nu} \geq M.$$

由  $M$  的任意性立得 (2.1), 引理证毕。

**附注 2.1.** 若  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$  或  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$ ,  $\{a_n\}$  有界, 则  $\{a_n\}$  必满足

引理 2.1 中的条件。

**命题 2.6.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^N p_{i,j}^{(n)} / \sum_{i=0}^N p_{i,j}^{(n)} \right) = f_{i,j}^*.$

**证** 由命题 2.2 有

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N p_{i,j}^{(n)} &= \sum_{i=1}^N \sum_{\nu=1}^n f_{i,j}^{(\nu)} p_{i,j}^{(n-\nu)} = \sum_{\nu=0}^{N-1} p_{i,j}^{(\nu)} \sum_{i=n-\nu+1}^N f_{i,j}^{(n-\nu)} \\ &= \sum_{\nu=0}^{N-1} p_{i,j}^{(\nu)} \sum_{i=1}^{N-\nu} f_{i,j}^{(\nu)}. \quad \text{取 } a_\nu = p_{i,j}^{(\nu)}, \quad (\nu \geq 0), \quad b_0 = 0, \quad b_\nu = \end{aligned}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} f_{i,j}^{(n)}$ , ( $v \geq 1$ ), 并利用引理2.1立得命题2.6.

**命题2.7.**  $g_{i,j} = f_{i,j} \lim_{m \rightarrow \infty} (f_{i,j}^*)^m$ , 从而  $g_{i,j}$  非0即为  $f_{i,j}^*$ ,  $g_{i,j}$  非0即1, 且 “ $g_{i,j} = 1 \iff f_{i,j}^* = 1$ ”.

**证** 令  $g_{i,j}(m) = P^i \left( \bigcup_{1 \leq n_1 < \dots < n_m} \bigcap_{s=1}^m \left[ \frac{n_s}{j} \right] \right)$ , ( $m \geq 1$ ),

则由(1.1)有

$$g_{i,j}(m+1) = \sum_{k=1}^{\infty} P^i \left( \left[ \frac{1}{j}, \dots, \frac{k-1}{j}, \frac{k}{j} \right], \right.$$

$$\left. \bigcup_{k+1 \leq n_1 < \dots < n_m} \bigcap_{s=1}^m \left[ \frac{n_s}{j} \right] \right) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{i,j}^{(k)} g_{i,j}(m)$$

$$= f_{i,j}^* g_{i,j}(m).$$

若注意  $g_{i,j}(1) = f_{i,j}^*$ ,  $g_{i,j} = \lim_{m \rightarrow \infty} g_{i,j}(m)$ ,

则对  $m$  作归纳法可证:  $g_{i,j}(m+1) = f_{i,j}^* (f_{i,j}^*)^m$ , 所以

$$g_{i,j} = \lim_{m \rightarrow \infty} g_{i,j}(m+1) = \lim_{m \rightarrow \infty} f_{i,j}^* (f_{i,j}^*)^m.$$

**命题2.8.**  $f_{i,j} = p_{i,j} + \sum_{k \neq j} p_{i,k} f_{k,j}^*$ , ( $i, j \in E$ ).

**证** 用(1.1)即得

$$f_{i,j}^* = P^i \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{n}{j} \right] \right) = p_{i,j} + \sum_{n=2}^{\infty} P^i \left( \left[ \frac{1}{j}, \dots, \frac{n-1}{j}, \frac{n}{j} \right] \right)$$

$$= p_{i,j} + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k \neq j} P^i \left( \left[ \frac{1}{k} \right] \right) P^k \left( \left[ \frac{1}{j}, \dots, \frac{n-2}{j}, \frac{n-1}{j} \right] \right)$$

$$= p_{i,j} + \sum_{k \neq j} p_{i,k} f_{k,j}^*.$$

### § 3. 状态的分类及判别准则

令  $T = \{0, 1, 2, \dots\}$ ,  $E$  为可数集,  $P = (p_{ij}, i, j \in E)$  为  $E$  上的转移阵。称  $E$  为  $P$  (或者为  $P$  链) 的状态空间, 称  $E$  中任一点  $i$  为  $P$  之状态。在这一节中将要对  $E$  进行分类。由于分类的依据仅仅是  $P$ , 所以概率空间和  $P$  链可以隐而不现, 至多只参考 § 1 中构造的  $P$  链的概率空间  $(\Omega^*, \mathcal{F}^*, P^i)$  就够了。

在这一节中,  $T, E, P, (\Omega^*, \mathcal{F}^*, P^i)$  总是给定的, 并沿用 § 2 的符号。

**定义 3.1.** 称状态  $i$  可达  $j$  (记之为  $i \rightsquigarrow j$ ), 如果存在正整数  $m$ , 使  $p_{ij}^{(m)} > 0$ 。若  $i \rightsquigarrow j, j \rightsquigarrow i$ , 则称  $i, j$  互通, 记之为  $i \sim j$ 。如果  $f_{ii} < 1$ , 则称  $i$  是滑过状态, 全体滑过状态用  $N$  表之。若  $f_{ii} = 1$ , 则称  $i$  是常返状态, 全体常返状态用  $R$  表之。若常返状态  $i$  满足  $m_{ii} < \infty$ , 则称  $i$  是正状态, 反之称  $i$  为零状态, 全体正状态用  $R^+$  表之, 全体零状态用  $R^0$  表之。于是  $E = N \cup R = N \cup R^0 \cup R^+$ 。

**命题 3.1.**  $i \rightsquigarrow j \iff f_{ji} > 0, i \sim j \iff f_{ij} f_{ji} > 0$

**证** 由  $\sup_n p_{ij}^{(n)} \leq f_{ji} \leq \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)}$  立得命题。

**命题 3.2.**  $j \in N \iff \sum_{n=0}^{\infty} P_{jj}^{(n)} < \infty$ 。

**证** 由命题 2.4, 立得命题 3.2。

**命题 3.3.** 若  $f_{ii} = 1, f_{ij} > 0, (i \neq j)$ , 则

(1) 存在正整数  $m$  及正数  $c$ , 使

$$p_{ij}^{(m+n)} \geq c p_{ij}^{(n)}, (n \geq 0),$$

(2)  $f_{ij} = f_{ji} = f_{ii} = f_{jj} = 1$ ;

(3)  $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ji}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = \infty$ 。

证 (1) 因  $f_{i,i}^{(n)} > 0$ , 故存在  $M \geq 1$  使  $\alpha = p_{i,i}^{(M)} > 0$ . 用 (1.1) 及命题 2.7 有

$$\begin{aligned} \alpha &= P^i\left(\left[\begin{smallmatrix} M \\ j \end{smallmatrix}\right]\right) \\ &= P^i\left(\left[\begin{smallmatrix} M \\ j \end{smallmatrix}\right], \bigcup_{n=M}^{\infty} \left[\begin{smallmatrix} n \\ i \end{smallmatrix}\right]\right) + P^i\left(\left[\begin{smallmatrix} M, & M+1, & M+2, & \cdots \\ j, & \bar{i}, & \bar{i}, & \cdots \end{smallmatrix}\right]\right) \\ &= P^i\left(\left[\begin{smallmatrix} M \\ j \end{smallmatrix}\right]\right) P^i\left(\bigcup_{n=M}^{\infty} \left[\begin{smallmatrix} n \\ i \end{smallmatrix}\right]\right) + P^i\left(\left[\begin{smallmatrix} M, & M+1, & M+2, & \cdots \\ j, & \bar{i}, & \bar{i}, & \cdots \end{smallmatrix}\right]\right) \\ &\leq \alpha f_{i,i}^{(n)} + P^i\left(\bigcap_{n=M+1}^{\infty} \left[\begin{smallmatrix} n \\ i \end{smallmatrix}\right]\right) \\ &\leq \alpha f_{i,i}^{(n)} + P^i\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \left[\begin{smallmatrix} n \\ \bar{i} \end{smallmatrix}\right]\right) = \alpha f_{i,i}^{(n)} + (1 - g_{i,i}) = \alpha f_{i,i}^{(n)}. \end{aligned}$$

由  $\alpha > 0, 0 \leq f_{i,i}^{(n)} \leq 1$ , 得  $f_{i,i}^{(n)} = 1$ . 所以存在  $M'$  使  $\beta = p_{i,i}^{(M')} > 0$ . 于是  $p_{i,i}^{(M'+n-M)} \geq p_{i,i}^{(M')} p_{i,i}^{(n)} p_{i,i}^{(M)} = \alpha \beta p_{i,i}^{(n)}$ . 故取  $m = M + M'$ ,  $c = \alpha \beta$  即为所求。(1) 得证。

(2). 因为  $f_{i,i}^{(n)} = 1$ , 所以  $i \in R$ , 由命题 3.2 知  $\sum_{n=0}^{\infty} p_{i,i}^{(n)} = \infty$ ,

再用 (1) 得  $\sum_{n=0}^{\infty} p_{i,i}^{(n)} = \infty$ , 从而  $j \in R$ , 故  $f_{i,j}^{(n)} = 1$ . 总之我们由  $f_{i,i}^{(n)} = 1, f_{i,j}^{(n)} > 0$  推出了  $f_{i,j}^{(n)} = 1, f_{i,i}^{(n)} = 1$ . 当然由  $f_{i,i}^{(n)} = 1, f_{i,j}^{(n)} = 1$  亦可推出  $f_{i,i}^{(n)} = 1, f_{i,j}^{(n)} = 1$ . (2) 证毕. 由命题 3.2 及 2.6 得 (3).

**定义 3.2.** 设  $Q = (q_{i,j}, i, j \in E)$  是  $E$  上之矩阵,  $E_1 \subset E$ , 称  $Q_1 = (q_{i,j}, i, j \in E_1)$  为  $Q$  on  $E_1$ . (对于行(列)向量, 亦有类似定义.)

**定理 3.1.**  $E = N \cup R = N \cup (R^0 \cup R^+)$ ,  $P$  有如下形式,



	$N$	$R^0$	$R^+$
$N$	$Q$	$Q_0$	$Q_+$
$R^0$	$O$	$P_0$	$O$
$R^+$	$O$	$O$	$P_+$

即是  $PonR^0 = P_0$ ,  $PonR^+ = P_+$ ,  $PonN = Q$ ,  $Q_0 = (p_{i,j}, i \in N, j \in R^0)$ ,  $Q_+ = (p_{i,j}, i \in N, j \in R^+)$ ,  $p_{i,j} = 0, (i \in R^0, j \in \bar{R}^0)$ ,  $p_{i,j} = 0, (i \in R^+, j \in \bar{R}^+)$ 。  $P_0, P_+$  分别为定义在  $R^0, R^+$  上之转移阵。

证 (1) 若  $i \in R$ , 即  $f_{i,i}^* = 1$ 。若  $f_{i,j}^* > 0$ , 则由命题 3.3 有  $f_{j,i}^* = 1$ , 即  $j \in R$ 。这就证明了:

$$i \in R, j \in N \Rightarrow f_{i,j}^* = 0 \Rightarrow p_{i,j} = 0.$$

(2) 若  $i \in R^+$ , (从而  $f_{i,i}^* = 1, m_{i,i} < \infty$ ),  $f_{i,j}^* > 0$ , 则由命题 3.3 知:  $f_{j,i}^* = f_{j,i}^* = f_{j,i}^* = 1$ , 且存在正整数  $m$  及正数  $c$ , 使

$$p_{i,j}^{(n+m)} \geq cp_{i,j}^{(n)} \quad (\text{一切 } n \geq 0).$$

再用命题 2.2 及 2.4 有

$$\begin{aligned} \frac{1}{m_{j,j}} &= (F_{j,j}^*(1))^{-1} = \lim_{\lambda \uparrow 1} (1-\lambda)P_{j,j}(\lambda) \\ &= \lim_{\lambda \uparrow 1} (1-\lambda) \sum_{n=0}^{\infty} p_{j,j}^{(n)} \lambda^n \\ &\geq \lim_{\lambda \uparrow 1} (1-\lambda) c \sum_{n=0}^{\infty} p_{i,j}^{(n)} \lambda^{n+m} = \frac{c}{m_{i,i}} > 0, \end{aligned}$$

所以  $j \in R^+$ 。这就证明了:

$$i \in R^+, j \in \bar{R}^+ \Rightarrow f_{i,j}^* = 0 \Rightarrow p_{i,j} = 0.$$

(3) 若  $i \in R^0$ ,  $f_{i,j}^* > 0$ , 则由命题 3.3(1) 有  $f_{i,i}^* = 1$ 。谬设  $j \in R^+$ , 则由(2)知  $i \in R^+$ , 矛盾, 所以这就证明了:

$$i \in R^0, j \in R^+ \Rightarrow f_{i,j}^* = 0 \Rightarrow p_{i,j} = 0.$$

总上三步, 定理 3.1 得证。

下面我们对 $R^0$  ( $R^+$ 亦类似) 再分类。如定义 3.1, 对于任何  $i, j \in R^0$ , “ $i \rightsquigarrow j \iff f_{i,j} > 0$ ”。显然关系 “ $\rightsquigarrow$ ” 定义在  $R^0$  上是一等价关系, 即是具有 (i) 自返性 ( $i \in R^0 \Rightarrow i \rightsquigarrow i$ ); (ii) 对称性 ( $i, j \in R^0, i \rightsquigarrow j \Rightarrow j \rightsquigarrow i$ ); (iii) 传递性 ( $i, j, k \in R^0, i \rightsquigarrow j, j \rightsquigarrow k \Rightarrow i \rightsquigarrow k$ )。所以按关系  $\rightsquigarrow$  可以把  $R^0$  分成一些互不相交的等价类:

$$R^0 = R_1^0 + R_2^0 + \dots,$$

由命题 3.3 得知若  $i, j \in R_n^0$ , 则  $f_{i,j} = 1$ , 若  $i \in R_m^0, j \in R_n^0, m \neq n$ , 则  $f_{i,j} = 0$ 。由此, 我们得到:

**定理 3.2.**  $E = N \cup R = N \cup (R^0 \cup R^+)$   
 $= N \cup (\bigcup_m R_m^0) \cup (\bigcup_n R_n^+)$ ,  $P$  具有下述形状:

	$N$	$R_1^0$	$R_2^0$	$\dots$	$R_1^+$	$R_2^+$	$\dots$
$N$	$Q$	$Q_{0,1}$	$Q_{0,2}$	$\dots$	$Q_{+,1}$	$Q_{+,2}$	$\dots$
$R_1^0$	$O$	$P_{0,1}$	$O$	$\dots$	$O$	$O$	$\dots$
$R_2^0$	$O$	$O$	$P_{0,2}$	$\dots$	$O$	$O$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\backslash$	$\vdots$	$\vdots$	
$R_1^+$	$O$	$O$	$O$	$\dots$	$P_{+,1}$	$O$	$\dots$
$R_2^+$	$O$	$O$	$O$	$\dots$	$O$	$P_{+,2}$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$		$\backslash$

即是  $P_{0n} R_n^0 = P_{0,m}$ ,  $P_{0n} R_n^+ = P_{+,n}$ ,  $P_{0n} N = Q$ ,  $Q_{0,m} = (p_{i,j}, i \in N, j \in R_m^0)$ ,  $Q_{+,n} = (p_{i,j}, i \in N, j \in R_n^+)$ ,  $p_{i,j} = 0 (i \in R_m^0, j \in R_n^0)$ ,  $p_{i,j} = 0 (i \in R_n^+, j \in R_m^+)$ ,  $P_{0,m}$ ,  $P_{+,n}$  分别为  $R_m^0$ ,  $R_n^+$  上之转移阵。每一个  $R_m^0$  ( $R_n^+$ ) 都称为一个“零类” (正类)。零类和正类统称为常返类。 $N$  中每一状态自成一个类。

**定义 3.3.** 称  $E$  的非空子集  $J$  是封闭的, 如果  $i \in J, j \in J \Rightarrow p_{i,j} = 0$ , (即  $i \in J \Rightarrow \sum_{j \in J} p_{i,j} = 1$ )。

**定义3.4.** 对任何  $J \subset E$ , 记  $f_{i,J}^{(n)} = p^i \left( \begin{bmatrix} 1, \dots, n-1, n \\ \bar{J}, \dots, \bar{J}, J \end{bmatrix} \right)$ ,

$$f_{i,J} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{i,J}^{(n)} = p^i \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ J \end{bmatrix} \right), \quad p_{i,J}^{(*)} = p^i \left( \begin{bmatrix} n \\ J \end{bmatrix} \right) = \sum_{i \in J} p_{i,J}^{(*)},$$

$$\hat{J} = \{i \mid i \in E, f_{i,J} = 0\}.$$

**命题3.4.** 设  $J$  和  $\hat{J}$  都是  $E$  的非空子集, 则 (i)  $\hat{J}$  封闭; (ii)  $\hat{J} \cap \bar{J}$  亦封闭.

**证** (i) 设  $i \in \hat{J}$ ,  $j \in \bar{\hat{J}}$ , 则  $p_{i,j} f_{i,J} \leq f_{i,J} = 0$ ,  $f_{i,J} > 0$ , 所以  $p_{i,j} = 0$ , 此即  $\hat{J}$  封闭.

(ii) 取  $i \in \hat{J}$ . (a) 若  $j \in \bar{\hat{J}}$ , 则由 (i)  $p_{i,j} = 0$ . (b) 若  $j \in J$ , 则  $p_{i,j} \leq f_{i,J} = 0$ . 总 (a)、(b) 可知:  $\sum_{i \in \hat{J} \cap \bar{J}} p_{i,j} = 1$ . 故  $\hat{J} \cap \bar{J}$  封闭.

**命题3.5.** 对任何  $i \in E$ ,  $\{j \mid j \in E, f_{i,j} > 0\}$  封闭.

**证** 设  $k \in \{j \mid j \in E, f_{i,j} > 0\}$ ,  $l \in \bar{\{j \mid j \in E, f_{i,j} > 0\}}$ , 则  $f_{i,l} = 0$ ;  $f_{i,k} > 0$ , 从而  $f_{k,l} = 0$ , 故  $p_{k,l} = 0$ .

**定义3.5.** 称  $E$  是可约的 (或  $P$  是可约的), 若  $E$  有封闭的真子集  $J$ , 反之称  $E$  是不可约的.

**命题3.6.**  $E$  不可约的充要条件是  $f_{i,j} > 0$ ,  $(i, j \in E)$ .

**证** 充分性显然, 必要性也只须注意: 若  $f_{i,i_0} = 0$ , 则  $\{j \mid j \in E, f_{i,j} > 0\}$  是  $E$  的封闭真子集.

**系1.** 若存在  $i_0 \in E$ , 使  $f_{i_0,i} f_{i,i_0} > 0$ ,  $(i \in E)$ , 则  $E$  是不可约的.

**定义3.6.** 设  $i \in E$ ,  $i \sim i$ , 称  $\{n \mid p_{i,i}^{(n)} > 0, n \geq 1\}$  的最大公因子  $G.C.D. \{n \mid p_{i,i}^{(n)} > 0, n \geq 1\}$  为  $i$  之周期, 记之为  $d_i$ .

**命题3.7.** 若  $f_{i,i} > 0$ ,  $f_{i,j} > 0$ , 则  $d_i = d_j$ .

**证** 由假设有  $i \sim i$ ,  $i \sim j$ ,  $j \sim j$ , 所以  $d_i, d_j$  均有定义

且存在正整数  $s$  和  $t$  使  $p_{i,i}^{(s)} p_{i,i}^{(t)} > 0$ 。于是:  $p_{i,i}^{(s)} > 0 \rightarrow p_{i,i}^{(s+n+t)} \geq p_{i,i}^{(s)} p_{i,i}^{(n)} p_{i,i}^{(t)} > 0 \Rightarrow d_i$  能整除  $(s+n+t)$ 。但由  $p_{i,i}^{(s)} > 0$  可推出  $p_{i,i}^{(2s)} > 0$ , 故又有  $p_{i,i}^{(s)} > 0 \Rightarrow d_i$  能整除  $(s+2n+t)$ 。总之有:

$$p_{i,i}^{(s)} > 0 \Rightarrow d_i \text{ 能整除 } n。$$

所以  $d_i$  能整除  $d_j$ , 由  $d_i, d_j$  地位之对称性得  $d_i = d_j$ 。

**命题说明:** “ $i \in N, f_{i,i}^* > 0 \Rightarrow d_i$  有定义”; “ $i, j \in R_n^+(R_n^0) \Rightarrow d_i, d_j$  有定义且相等”。

下面再把每一个  $R_n^0$  (或  $R_n^+$ ) 分成循环子类。

由命题 3.7 知: 任取  $i \in R_n^0, d_i$  有定义, 且不依赖  $i \in R_n^0$ 。故可定义  $d_i$  为类  $R_n^0$  之周期, 用  $d^0(m)$  表之, 以说明它仅与  $R_n^0$  有关而与  $i \in R_n^0$  无关。若  $d^0(m) = 1$ , 则说  $R_n^0$  无周期。

**命题 3.8.** 设  $f_{i,i}^* f_{i,i}^* > 0$ 。则

(i)  $p_{i,i}^{(m)} p_{i,i}^{(n)} > 0 \Rightarrow d_i | (m+n)$  ( $d | k$  表  $d$  能整除  $k$ );

(ii)  $p_{i,i}^{(n_1)} p_{i,i}^{(n_2)} > 0 \Rightarrow d_i | (n_1 - n_2)$ ;

(iii) 存在  $M(i)$ , 使  $p_{i,i}^{(m)} > 0$  ( $m \geq M(i)$ );

(iv) 存在  $r_i$ , 使  $p_{i,i}^{(n)} > 0 \Rightarrow n = r_i \pmod{d_i}$ ;

(v) 存在  $K(i)$ , 使  $n \geq K(i) \Rightarrow p_{i,i}^{(n)} > 0$ 。

**证** (i)  $p_{i,i}^{(m)} p_{i,i}^{(n)} > 0 \Rightarrow p_{i,i}^{(m+n)} > 0 \Rightarrow d_i | (m+n)$ 。

(ii) 由  $f_{i,i}^* > 0$  知, 存在  $v \geq 1$  使  $p_{i,i}^{(v)} > 0$ 。所以由  $p_{i,i}^{(n_1)} p_{i,i}^{(n_2)} > 0$  得  $p_{i,i}^{(n_1)} p_{i,i}^{(v)} > 0, p_{i,i}^{(n_2)} p_{i,i}^{(v)} > 0$ 。用 (i) 得  $d_i | (n_1 + v), d_i | (n_2 + v)$ , 从而  $d_i | (n_1 - n_2)$ 。

(iii) 由  $d_i$  的定义知: 存在  $n_1, \dots, n_k$ , 使

$$\prod_{s=1}^k p_{i,i}^{(n_s)} > 0, d_i = G. C. D. \{n_1, \dots, n_k\}。$$

用数论中一条初等定理得知: 存在  $M(i)$ , 当  $m \geq M(i)$  时有:

$$md_i = \sum_{s=1}^k c_s n_s, (c_s \text{ 是正整数})。所以$$

$$p_{i,i}^{(md_i)} \geq \prod_{s=1}^k (p_{i,i}^{(n_s)})^{c_s} > 0, (m \geq M(i))。$$

(iv) 由(ii) 立得(iv)。

(v) 由 $f_{i,j} > 0$ 及(iv)得知存在 $m'd_i + r_i$ , 使  $p_{i,j}^{(m'd_i + r_i)} > 0$ 。  
由(iii), 取 $K(i) = m' + M(i)$ 即为所求。

**定义3.7.** 设 $E$ 是不可约的,  $d$ 为其周期(由命题3.7,  $E$ 中任一状态 $i$ 之周期 $d_i$ 不依赖 $i$ , 故可以 $d_i$ 为 $E$ (或者 $P$ )之周期), 若 $d > 1$ , 令  $H_{i,j} = G, C, D, \{n | p_{i,j}^{(n)} > 0, n \geq 1\}$ , 若 $d | H_{i,j}$ , 则称 $i, j$ 具有关系  $\approx$ , 记作 $i \approx j$ 。若 $d = 1$ , 则称 $E$ (或者 $P$ )是无周期。

**命题3.9.** 定义3.7中确定的关系 $\approx$ 是一个等价关系。

**证** (1) 自返性, 由 $d = H_{i,i}$ 即得 $i \approx i$ 。

(2) 对称性, 设 $i \approx j$ , 任取 $m$ , 使 $p_{i,j}^{(m)} > 0$ , 于是 $d | m$ 。又由命题3.8(i)知: 若 $p_{i,j}^{(m)} > 0$ , 则 $d | (m + n)$ , 所以 $d | n$ , 从而 $d | H_{j,i}$ , 即  $j \approx i$ 。

(3) 传递性, 设 $i \approx j, j \approx k$ , 任取 $s, t$ , 使 $p_{i,j}^{(s)} > 0, p_{j,k}^{(t)} > 0$ 。  
于是 $d | s, d | t$ , 而由命题3.8(ii)知 $p_{i,k}^{(s+t)} > 0$  ( $\because p_{i,k}^{(s+t)} > 0$ )  $\Rightarrow n = s + t \pmod{d}$ 。

再注意 $d | (s + t)$ 得:  $p_{i,k}^{(n)} > 0 \Rightarrow n = 0 \pmod{d}$ 。此即 $i \approx k$ 。

**命题3.10.** 设 $E$ 不可约,  $i \approx j$ , 则 $d = H_{i,i}$ 。

**证** 设 $H_{i,j} = \delta$ , 任取 $t$ , 使 $p_{i,j}^{(t)} > 0$ , 按命题3.8(iii)可取 $m_0$ 使  $p_{i,j}^{(m_0 d)} p_{j,i}^{((m_0 - 1)d)} > 0$ , 于是  $p_{i,i}^{(t + m_0 d)} p_{j,j}^{((t + (m_0 + 1)d)}$   $> 0$ , 所以 $\delta | (t + m_0 d), \delta | (t + (m_0 + 1)d)$ , 从而 $\delta | d$ , 而 $i \approx j \Rightarrow d | \delta$ , 所以 $d = \delta$ 。

**命题3.11.** 设 $E$ 不可约, 则 " $p_{i,j_1}^{(m_1)} p_{j_1,i}^{(m_2)} > 0, m_1 = m_2 \pmod{d} \Rightarrow j_1 \approx j_2$ "。

**证** 设 $p_{i,j_1}^{(m_1)} p_{j_1,i}^{(m_2)} > 0, m_1 = m_2 \pmod{d}$ , 则由命题3.8(ii)知:  $p_{i,j_1}^{(m_1)} > 0 \Rightarrow p_{i,j_1}^{(m_1 + n)} > 0 \Rightarrow m_1 + n = m_2 \pmod{d} \Rightarrow n = 0 \pmod{d}$ , 故 $j_1 \approx j_2$ 。

**命题3.12.** 设 $E$ 不可约, 周期为 $d$ , 则关系 $\approx$ 恰巧把 $E$ 分为 $d$ 个不交的循环类:  $E = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_d$ ,  $i, j$ 同属于一个循环类 $C_r$ 的充要条件是 $i \approx j$ , 而且 " $i \in C_r, j \in C_{r+1} \Rightarrow p_{i,j} = 0$ ", (从而 $p_{i,j}^{(n)} >$

0,  $i \in C_r, j \in C_q \Rightarrow q - r = s \pmod{d}$ ).

证 不妨设  $d > 1$ , 由于  $\approx$  是一个等价关系, 所以可以把  $E$  分成若干个不变的循环类, 使  $i, j$  同属于一个循环类的充要条件是  $i \approx j$ , 故为证命题, 只须证明两点: (1) 循环类的个数恰为  $d$ ; (2)  $i \in C_r, j \in C_{r+1} \Rightarrow p_{i,j} = 0$ , (注: 记  $C_m = C_r$  当  $1 \leq r \leq d, m = r \pmod{d}$ )

(1) 先证循环类之个数不超过  $d$ , 反之, 必有状态  $i_0, i_1, \dots, i_d$ , 使  $i_s$  与  $i_t$  无关系  $\approx$ , ( $s \neq t, 0 \leq s, t \leq d$ ), 取  $m_1, \dots, m_d$  使  $\prod_{h=1}^d p_{i_0, i_h}^{(m_h)} > 0$ , 由命题 3.11 有  $m_s \neq m_t \pmod{d}$ , ( $1 \leq s, t \leq d, s \neq t$ ), 由命题 3.8(iii) 再取  $m_0$ , 使  $p_{i_0, i_0}^{(m_0 d)} > 0$ . 用命题 3.11 又有  $m_s \neq m_0 d \pmod{d}$ , ( $1 \leq s \leq d$ ), 而  $d$  个正整数  $\{m_s, 1 \leq s \leq d\}$  每一个都不能被  $d$  整数, 又互不同余, 是不可能的, 这就证明了循环类之个数不超过  $d$ .

于是可令  $E = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_d$ , 再证每个  $C_r$  非空, 由命题 3.10 知:  $i$  与  $j$  属于同一类  $\Rightarrow p_{i,j} > 0$ , 今在各个类中取一非空者, 认为这是  $C_1$ , 任取  $i_1 \in C_1$ , 由  $1 = \sum_{j \in E} p_{i_1, j} = \sum_{j \in \bigcup_{k=2}^d C_k} p_{i_1, j}$  得知存在  $i_2 \in$

$\bigcup_{k=2}^d C_k$ , 使  $p_{i_1, i_2} > 0$ , 就认为含  $i_2$  者为  $C_2$ , 若  $d = 2$ , 则终止, 设  $d > 2$ , 由命题 3.10 知  $p_{i_1, j}^{(2)} = 0, (j \in C_1)$ , 又  $p_{i_1, i_2} > 0, p_{i_1, j}^{(2)} \geq p_{i_1, i_2} p_{i_2, j}$ , 所以  $p_{i_2, j} = 0 (j \in C_1)$ , 而  $p_{i_2, i_1} = 0, (j \in C_2)$ , 故

$1 = \sum_{j \in E} p_{i_2, j} = \sum_{j \in \bigcup_{k=3}^d C_k} p_{i_2, j}$  因此存在  $i_3 \in \bigcup_{k=3}^d C_k$ , 使  $p_{i_2, i_3} > 0$ ,

就认为含  $i_3$  者为  $C_3$ , 若  $d = 3$  则终止, 若  $d > 3$ , 再仿上作下去,  $d$  次以后得到  $d$  个状态  $i_1, \dots, i_d$ , 使  $i_k \in C_k, (1 \leq k \leq d)$ , 且

$$\prod_{k=1}^{d-1} p_{i_k, i_{k+1}} > 0. (1) \text{证毕。}$$

(2) 再证  $i \in C_r, j \in C_{r+1} \Rightarrow p_{i,j} = 0$ .

设  $i \in C_\alpha, j \in C_\beta, p_{i,j} > 0$ , 往证  $\beta = \alpha + 1 \pmod{d}$ , 事实上, 不妨令  $\beta \geq \alpha$ , 因  $i \approx i_\alpha, j \approx i_\beta$  ( $i_\alpha$  是 (1) 中找出的, 故有  $p_{i_\alpha, i_{\alpha+1}} > 0$ ), 所以存在  $m$  及  $m'$  使  $p_{i, i_\alpha}^{(m, d)} > 0, p_{i_\beta, j}^{(m', d)} > 0$ , 因此,  $p_{i, j}^{(m, d) + \beta - \alpha + m' d} \geq p_{i, i_\alpha}^{(m, d)} p_{i_\alpha, i_{\alpha+1}} \cdots p_{i_{\beta-1}, i_\beta} p_{i_\beta, j}^{(m', d)} > 0$ , 但又有  $p_{i,j} > 0$ , 所以由命题 3.8(ii) 有  $md + \beta - \alpha + m'd = 1 \pmod{d}$ , 所以  $\beta = \alpha + 1 \pmod{d}$ .

**定理 3.3.** 设  $E$  不可约, 周期为  $d$ , 则  $E$  可分成  $d$  个互不相交的非空的循环类:  $E = \bigcup_{k=1}^d C_k$ , 这时  $P$  有如下形式 ( $d > 1$  时),

	$C_1$	$C_2$	$\dots$	$C_{d-1}$	$C_d$
$C_1$	$O$	$\hat{P}_1$	$\dots$	$O$	$O$
$C_2$	$O$	$O$	$\hat{P}_2 \dots$	$O$	$O$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$C_{d-1}$	$O$	$O$	$\dots$	$O$	$\hat{P}_{d-1}$
$C_d$	$\hat{P}_d$	$O$	$\dots$	$O$	$O$

$P^{(d)} = \tilde{P} = (\tilde{p}_{i,j}, i, j \in E)$  有如下形式

	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$\dots$	$C_d$
$C_1$	$\tilde{P}_1$	$O$	$O$	$\dots$	$O$
$C_2$	$O$	$\tilde{P}_2$	$O$	$\dots$	$O$
$C_3$	$O$	$O$	$\tilde{P}_3$	$\dots$	$O$
$\vdots$					
$C_d$	$O$	$O$	$O$	$\dots$	$\tilde{P}_d$

即是  $\tilde{P}onC_a = \tilde{P}_a$  是转移阵,  $\tilde{p}_{i,j} = 0, (i \in C_a, j \in \overline{C_a}), a = 1, 2, \dots, d$ , 此外  $\tilde{P}_a$  是不可约的, 无周期的。

证 只证  $\tilde{P}onC_a = \tilde{P}_a$  是不可约无周期的转移阵, (其它论断前面诸命题已证)。

任取  $i \in C_a$ , 若  $\tilde{p}_{i,i} > 0$ , 即  $p_{i,i}^{(d)} > 0$ , 则必有  $j_1, \dots, j_{d-1}$ , 使  $p_{i,j_1} p_{j_1,j_2} \dots p_{j_{d-1},i} > 0$ , 所以由命题3.12有  $j_1 \in C_{a+1}, \dots, j_{d-1} \in C_{a+d-1}$ , 所以  $j \in C_{a+d} = C_a$ , 可见 “ $i \in C_a, j \in \overline{C_a} \Rightarrow \tilde{p}_{i,j} = 0$ ”, 此即  $\tilde{P}_a$  是转移阵。

任取  $i, j \in C_a$ , 由  $E$  不可约知: 存在  $m$ , 使  $p_{i,j}^{(m)} > 0$ , 因  $i, j$  同属于一个循环类, 故必有  $m = rd$ , 所以  $\tilde{p}_{i,j}^{(r)} = p_{i,j}^{(rd)} - p_{i,j}^{(m)} > 0$ , 所以  $\tilde{P}onC_a$  是不可约的。

最后证明  $\tilde{P}onC_2$  是无周期的。任取  $i \in C_a$ , 由命题3.8(iii) 必存在  $m_0$ , 使  $p_{i,i}^{(m_0 d)} > 0, p_{i,i}^{((m_0+1)d)} > 0$ , 此即  $\tilde{p}_{i,i}^{(m_0)} > 0, \tilde{p}_{i,i}^{(m_0+1)} > 0$ , 所以  $G, C, D, \{m; \tilde{p}_{i,i}^{(m)} > 0\} = 1$ 。至此, 定理证毕。

由定理3.2, 对任意  $E$ , 可分解成  $E = N \cup (\bigcup_m R_m^0) \cup (\bigcup_n R_n^+)$ , 由于  $PonR_m^0 = P_{0,m}$  是不可约的 ( $PonR_n^+ = P_{+,n}$  亦然), 若令  $R_m^0(R_n^+)$  之周期为  $d^0(m)(d^+(n))$ , 则由定理3.3,  $R_m^0(R_n^+)$  恰可分为  $d^0(m)(d^+(n))$

个循环类  $R_m^0 = \bigcup_{t=1}^{d^0(m)} R_m^0(t) (R_n^+ = \bigcup_{t=1}^{d^+(n)} R_n^+(t))$ ,  $P_{0,m}^{d^0(m)}, P_{+,n}^{d^+(n)}$  是不可

约无周期的转移阵, 且 “ $p_{i,j}^{(r)} > 0, i \in R_m^0(s), j \in R_m^0(t) \Rightarrow t-s = r \pmod{d^0(m)}$ ”。

定理3.4. 对任意  $E$ , 有

$$(1) i \in R \iff \sum_{n=0}^{\infty} p_{i,i}^{(n)} = \infty \iff f_{i,i}^* = 1 \iff g_{i,i} = 1,$$

$$i \in R^+ \iff \sum_{n=1}^{\infty} p_{i,i}^{(n)} = \infty, F'_{i,i}(1) < \infty \iff f_{i,i}^* = 1,$$

$$F'_{i,i}(1) < \infty \iff g_{i,i} = 1, F'_{i,i}(1) < \infty,$$



(2)  $i \in R, i \sim j, \Rightarrow f_{i,i} = f_{i,i} = f_{i,i} = f_{i,i} = 1, g_{i,i} = g_{i,i} = g_{i,i} = g_{i,i} = 1.$

**证** 由命题2.4、2.7、3.3立得定理3.4.

在本书中, 矩阵(特别地, 向量)的大小的比较、极限, …等, 都是逐元意义下的. 例如  $Q^{(n)} = (q_{ij}^{(n)}, i, j \in E)$ , 则  $Q^{(n)} \geq Q^{(m)}$  定义为  $q_{ij}^{(n)} \geq q_{ij}^{(m)}, (i, j \in E)$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} Q^{(n)}$  定义为  $(\lim_{n \rightarrow \infty} q_{ij}^{(n)}, i, j \in E)$ .

零矩阵(向量)亦用 0 表之. 对矩阵(向量)常分块表示, 例如  $E =$

$$E_1 \cup E_2, E_1 \cap E_2 = \emptyset, Q = (q_{ij}, i, j \in E), \text{ 则 } Q = \begin{matrix} & E_1 & E_2 \\ \begin{matrix} E_1 \\ E_2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

表示  $(q_{ij}, i \in E_s, j \in E_t) = Q_{st}, (s, t = 1, 2).$

## § 4. 遍历性定理及状态的区分

在这一节中, 恒设  $E$  是可数集,  $P = (p_{ij}, i, j \in E)$  是  $E$  上的转移阵,  $P^n = P^{(n)} = (p_{ij}^{(n)}, i, j \in E)$  是  $n$  步转移阵,  $(\Omega^*, \mathcal{F}^*, P^i)$ ,  $(i \in E)$  是如 § 1 所定义的  $P$  链的概率空间, 本节研究的主要内容是:  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)}$  存在的充要条件是什么? 当此极限存在时, 如何求? 有何性质? 及状态的区分……等等.

**引理4.1.** 设  $\{f_n, n \geq 1\}$ 、 $\{p_n, n \geq 0\}$  是两个非负实数序列,

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \leq 1, p_n \leq 1, p_0 = 1, \text{ 且}$$

$$p_n = \sum_{i=1}^n f_i p_{n-i}, (n \geq 1), \quad (4.1)$$

则  $G. C. D. \{n | f_n > 0, n \geq 1\} = G. C. D. \{n | p_n > 0, n \geq 1\}.$

**证** 令  $s = \min\{n | f_n > 0, n \geq 1\}$ , 则  $s = \min\{n | p_n > 0, n \geq 1\}.$  再令  $d_N^f = G. C. D. \{n | f_n > 0, s \leq n \leq N\}$ ,  $d_N^p = G. C. D. \{n | p_n > 0,$

$s \leq n \leq N$  ( $N \geq s$ ). 显然  $d' = s = d''$ . 设  $d'_N = d''_N$ , 往证:  $d'_{N+1} = d''_{N+1}$ .

事实上,  $p_{N+1} = \sum_{v=1}^N f_v p_{N+1-v} + f_{N+1}$ , 若  $f_{N+1} > 0$ , 则  $p_{N+1} > 0$ , 所

以由归纳法假设得  $d'_{N+1} = G. C. D. \{d'_N, N+1\} = G. C. D.$

$\{d''_N, N+1\} = d''_{N+1}$ ; 若  $f_{N+1} = 0 = p_{N+1}$ , 则类似地有  $d'_{N+1} = d''_{N+1}$ ;

若  $f_{N+1} = 0$ ,  $p_{N+1} > 0$ , 则存在  $v, 1 \leq v \leq N$ , 使  $f_v p_{N+1-v} > 0$ . 因此

$d'_N | v$ ,  $d''_N | (N+1-v)$ , 从而由  $d'_N = d''_N$  得  $d'_N | (N+1)$ ,  $d''_N | (N+1)$ ,

所以  $d'_{N+1} = d'_N = d''_N = d''_{N+1}$ . 总之, 恒有  $d'_{N+1} = d''_{N+1}$  (一切  $N \geq s$ ).

引理证毕.

**定理4.1.** 若  $i$  是常返状态, 其周期为  $d_i$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{f_i^{(n)}\} = d_i / m_{i,i}, \quad (4.2)$$

(其中  $m_{i,i}$  是平均再现时间, 当  $b = \pm \infty$ ,  $a$  是实数时, 此后恒定义

$\frac{a}{b} = 0$ ).

**证** 由于  $i$  是固定的, 简记  $p_i^{(n)}$ ,  $f_i^{(n)}$ ,  $d_i$ ,  $m_{i,i}$  为  $p_n$ ,  $f_n$ ,  $d$ ,  $m$ . 显然  $\{f_n; n \geq 1\}$ ,  $\{p_n; n \geq 0\}$  满足引理4.1的条件. 令  $r_n =$

$\sum_{v=n+1}^{\infty} f_v$ , ( $n \geq 0$ ), 则

$$r_0 p_n = p_n = \sum_{v=1}^n f_v p_{n-v} = \sum_{v=1}^n (r_{v-1} - r_v) p_{n-v},$$

从而  $\sum_{v=0}^n r_v p_{n-v} = \sum_{v=0}^{n-1} r_v p_{n-1-v}$ , 不依赖  $n \geq 0$ , 但  $r_0 p_0 = 1$ , 所以

$$\sum_{v=0}^n r_v p_{n-v} = 1, \quad (n \geq 0), \quad (4.3)$$

令  $\lambda = \limsup_{n \rightarrow \infty} p_{n,d} = \limsup_{n \rightarrow \infty} p_n$ . 必有  $\{n_k\}$  使  $\lim_{k \rightarrow \infty} p_{n_k,d} = \lambda$ . 用

(4.1) 及  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = 1$  可证:

$$“f_s > 0, \lim_{k \rightarrow \infty} p_{m_k} = \lambda \implies \lim_{k \rightarrow \infty} p_{m_k+s} = \lambda”.$$

所以, 反复利用上述推理可证:

$$“t = \sum_{j=1}^l c_j s_j, \quad c_j, s_j \text{ 正整数}, f_{s_j} > 0, 1 \leq j \leq l \implies \lim_{k \rightarrow \infty} p_{(n_k - t)d} = \lambda”.$$

用引理 4.1 及  $d$  之定义得知存在  $s_j, f_{s_j} > 0, 1 \leq j \leq l$ , 使  $d = G.C.D.\{s_1, \dots, s_l\}$ , 所以由数论的一条初等定理可知: 存在  $s_0$

$$\text{使 “} s \geq s_0 \implies sd = \sum_{j=1}^l c_j s_j”. \text{ 因此, } \lim_{k \rightarrow \infty} p_{(n_k - s)d} = \lambda, (s \geq s_0). \text{ 以}$$

$n = (n_k - s_0)d$  代入 (4.3) 并注意  $p_v = 0$  (当  $v \neq 0 \pmod{d}$ ), 有

$$\sum_{v=0}^{n_k - s_0} r_{v,d} p_{(n_k - s_0 - v)d} = 1, \quad \text{当 } \sum_{v=0}^{\infty} r_{v,d} < \infty \text{ 时, 在前式中令}$$

$k \rightarrow \infty$  并应用控制收敛定理 (注意  $\lim_{k \rightarrow \infty} p_{(n_k - s)d} = \lambda, s \geq s_0$ ).

可得  $\lambda \sum_{v=0}^{\infty} r_{v,d} = 1$ , 而当  $\sum_{v=0}^{\infty} r_{v,d} = \infty$  时易证  $\lambda = 0$ . 总之恒有

$$\lambda = 1 / \sum_{v=0}^{\infty} r_{v,d}. \quad \text{又因为 } f_v = 0 \quad (\text{当 } v \neq 0 \pmod{d}), \text{ 所以 } r_{v,d} =$$

$$\frac{1}{d} \sum_{j=vd}^{vd+d-1} r_j, \text{ 从而 } \sum_{v=0}^{\infty} r_{v,d} = \frac{1}{d} \sum_{v=0}^{\infty} r_v = \frac{m}{d}. \text{ 所以 } \lambda = \frac{d}{m}. \text{ 若令 } \beta =$$

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} p_{nd}, \text{ 仿之可证 } \beta = \frac{d}{m}. \text{ 定理证毕.}$$

**系 1.** 设  $i, j$  同属于某个周期为  $d$  的常返类  $R_m^0$  (或  $R_i$ ),  $R_m^0 = R_m^0(1) \cup \dots \cup R_m^0(d)$ ,  $i \in R_m^0(s)$ ,  $j \in R_m^0(t)$ , 则

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p_{j,i}^{(n_k d + r)} = \begin{cases} 0, & \text{若 } r \neq t - s \pmod{d} \\ \frac{d}{m_{j,i}}, & \text{若 } r = t - s \pmod{d} \end{cases} \quad (4.4)$$

**证** 当  $r \neq (t - s) \pmod{d}$ , 系 1 的论断显然成立. 当  $r = (t -$

3)  $(\text{mod } d)$  时由命题3.3我们有  $\sum_{v=1}^{\infty} f_{i,j}^{(vd+r)} = \sum_{v=1}^{\infty} f_{i,j}^{(v)} = 1$ . 再注意  $p_{i,j}^{(v)} = 0$  ( $v \neq 0 \pmod{d}$ ) 有

$$p_{i,j}^{(nd+r)} = \sum_{v=0}^n f_{i,j}^{(vd+r)} p_{i,j}^{(nd-vd)}, \quad (4.5)$$

在(4.5)中令  $n \rightarrow \infty$  并应用引理2.1及定理4.1即得(4.5)的第二式.

对于任何周期为  $d$  的状态  $j$ , 令  $f_{i,j}^*(r) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv r \pmod{d}}}^{\infty} f_{i,j}^{(n)}$ .

**定理4.2.** (1) 若  $j$  不是正状态, 则  $\lim_{r \rightarrow \infty} p_{i,j}^{(r)} = 0$ , ( $i \in E$ );

(2) 若  $j$  是正状态, 且周期为  $d_j$ , 平均再现时间为  $m_{j,j}$ , 且

(a) 若  $i$  是常返状态但与  $j$  不在同一类中, 则  $p_{i,j}^{(n)} = 0$  (一切  $n \geq 1$ );

(b) 若  $i, j$  同属于一个正类,  $i \in R_s^+(s)$ ,  $j \in R_t^-(t)$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{i,j}^{(nd_j+r)} = \frac{d_j}{m_{j,j}}$ , (当  $r = t - s \pmod{d}$ ),  $p_{i,j}^{(n)} = 0$ , (当  $n \not\equiv (t-s) \pmod{d}$ );

(c) 若  $i$  是滑过状态, 则对一切  $r$  有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{i,j}^{(nd_j+r)} = f_{i,j}^*(r) \frac{d_j}{m_{j,j}}.$$

**证** 由命题2.2, 3.2及定理4.1的系1即得(1). 由定理3.2得(2)(a), 由系1得(2)(b), 由(4.5)及引理2.1定理4.1得(2)(c).

**定理4.3.** 对任何  $i, j \in E$ , 总有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n p_{i,j}^{(v)} = \pi_{i,j} \quad (4.6)$$

存在, 其中  $\pi_{i,j} = f_{i,j}^*/m_{j,j}$ , (当  $j$  不是常返状态时, 定义  $m_{j,j} = +\infty$ .)  $\Pi = (\pi_{i,j}, i, j \in E)$  称为  $P$  的遍历极限.

**证** 由定理4.2即得.

**定理4.4.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} P^{(n)}$  存在的充要条件是每一个正状态的周期都是1。如果条件成立, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} P^{(n)} = \Pi = (\pi_{i,j}, i, j \in E)$ ,  $\pi_{i,j}$  由定理4.3所定义。

**证** 由定理4.2、4.3即得。

下面我们研究  $\Pi$  的性质及求法。

**命题4.1.** 对于任何  $i \in E, j \in R_i^+$  ( $j \in R_i^0$  类似), 有

$$f_{i,j}^* = f_{i,R_i^+}^*, \quad (f_{i,R_i^+}^* \text{ 之定义见定义3.4}). \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \text{证} \quad f_{i,R_i^+}^* &= \sum_{k=1}^{\infty} P^k \left( \begin{bmatrix} 1, \dots, k-1, k \\ \bar{R}_i^+, \dots, \bar{R}_i^+, R_i^+ \end{bmatrix} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P^k \left( \begin{bmatrix} 1, \dots, k-1, k, k+1, k+2, \dots \\ \bar{R}_i^+, \dots, \bar{R}_i^+, R_i^+, \bar{j}, \bar{j}, \dots \end{bmatrix} \right) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} P^k \left( \begin{bmatrix} 1, \dots, k-1, k \\ \bar{R}_i^+, \dots, \bar{R}_i^+, R_i^+ \end{bmatrix}, \bigcup_{v=k+1}^{\infty} \begin{bmatrix} v \\ j \end{bmatrix} \right), \end{aligned} \quad (4.8)$$

用(1.1)并注意  $f_{s,j}^* = 1$  ( $s \in R_i^+$ ) 可得(4.8)右边第一项为0。而第

$$\begin{aligned} \text{二项} &= P^1 \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} \left( \begin{bmatrix} 1, \dots, k-1, k \\ \bar{R}_i^+, \dots, \bar{R}_i^+, R_i^+ \end{bmatrix} \cap \bigcup_{v=k+1}^{\infty} \begin{bmatrix} v \\ j \end{bmatrix} \right) \right) \leq P^1 \left( \bigcup_{v=1}^{\infty} \begin{bmatrix} v \\ j \end{bmatrix} \right) \\ &= f_{i,j}^*, \text{ 所以 } f_{i,R_i^+}^* \leq f_{i,j}^*, \text{ 而小于号不能成立, 故 } f_{i,j}^* = f_{i,R_i^+}^*. \end{aligned}$$

**命题4.2.**  $\Pi = \Pi P = P \Pi = \Pi^2$ 。

**证** 用控制收敛定理可得:

$$\begin{aligned} P\Pi &= P \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n P^{(v)} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P \left( \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n P^{(v)} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( \frac{1}{n+1} \sum_{v=1}^{n+1} P^{(v)} \right) \frac{n+1}{n} - \frac{1}{n} P \right] = \Pi. \end{aligned}$$

用法都引理可得:

$$\Pi P = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P^{(i)} \right) P$$

$$\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P^{(i+1)} \right) = \Pi,$$

若令  $1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}$ , 则  $\Pi P 1 = \Pi 1$ , 故上式不等号不可能成立, 所以  $\Pi P = \Pi$ .

由  $\Pi = \Pi P$  得  $\Pi = \Pi P^{(n)}$ , ( $n \geq 0$ ), 所以  $\Pi = \Pi \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P^{(i)} \right)$ ,

( $n \geq 1$ ), 令  $n \rightarrow \infty$  并用控制收敛定理可得:  $\Pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \Pi \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P^{(i)} \right)$

$= \Pi \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P^{(i)} \right) = \Pi^2$ . 命题证毕.

**定理 4.5.** 记  $E = N \cup R = N \cup R^0 \cup R^+ = N \cup \left( \bigcup_n R_n^0 \right) \cup \left( \bigcup_n R_n^+ \right)$ , 则  $\Pi$  具有下述形式:

	$N$	$R^0$	$R_1^+$	$R_2^+$	$R_3^+$	...
$N$	0	0	$A(1)$	$A(2)$	$A(3)$	...
$R^0$	0	0	0	0	0	...
$R_1^+$	0	0	$B(1)$	0	0	...
$R_2^+$	0	0	0	$B(2)$	0	...
$R_3^+$	0	0	0	0	$B(3)$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...

即  $\pi_{i,j} = 0$  ( $i \in E, j \in N \cup R^0$ ),  $A(m) = (\pi_{i,j}, i \in N, j \in R_m^+)$ ,

$B(n) = \Pi \text{ on } R_n^+$ ,  $\pi_{i,j} = 0$  ( $i \in \bar{N} \cup R_n^+$ ,  $j \in R_n^+$ ). 若记  $\pi'(n) = (\frac{1}{m_{j,j}}, j \in R_n^+)$  是以  $\frac{1}{m_{j,j}}$  为分量定义域为  $R_n^+$  的行向量,  $a(m) = (f_{i,R_m^+}^*)_{i \in N}$  是以  $f_{i,R_m^+}^*$  为分量定义域为  $N$  的列向量, 则有  $B(n) = 1\pi'(n)$ ,  $A(m) = a(m)\pi'(m)$ , 此外还有  $B(n)1 = 1$ , 即是  $B(n)$  是行行一样的每个元素都大于0的转移阵。

**证** 用定理4.2及命题4.1, 为证此定理, 只须证明  $B(n)1 = 1$  即可。事实上, 由命题4.2,  $\Pi = \Pi^2$  得  $B(n) = B(n)^2$ , 即  $1\pi'(n) = (1\pi'(n))(1\pi'(n)) = 1(\pi'(n)1)\pi'(n) = (\pi'(n)1)(1\pi'(n))$ , 由  $1\pi'(n)$  每一元素均为正知  $\pi'(n)1 = 1$ , 故  $B(n)1 = (1\pi'(n))1 = 1(\pi'(n)1) = 1$ . 定理证毕。

**定义4.1.** 称  $Q = (q_{i,j}, i, j \in E)$  是准转移阵, 如果  $q_{i,j} \geq 0$ ,  $\sum_k q_{i,k} \leq 1$ , ( $i, j \in E$ )。称准转移阵  $Q$  具有  $\Pi$  结构, 如果  $E$  可分成不交子集的并:  $E = G \cup F_1 \cup F_2 \cup \dots$  ( $G$  或  $F_k$  可为空集), 使  $Q$  具有下述形状:

	$G$	$F_1$	$F_2$	$\dots$
$G$	0	$C(1)q'(1)$	$C(2)q'(2)$	$\dots$
$F_1$	0	$1q'(1)$	0	$\dots$
$F_2$	0	0	$1q'(2)$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$

其中  $C(m)$  是以  $G$  为定义域的分量为非负实数的列向量,  $q'(n)$  是以  $F_n$  为定义域的分量为非负实数的行向量, 且  $q'(n)1 = 1$ .

显然, 若  $Q$  具有  $\Pi$  结构, 则必有  $Q^2 = Q$ , (注意  $q'(n)1 = 1$ )。又由定理4.5,  $\Pi$  是具有  $\Pi$  结构的 (取  $G = N \cup R^0$ ,  $F_n = R_n^+$ ,  $q'(n) = \pi'(n)$ ,  $C(m) = \begin{pmatrix} a(m) \\ 0 \end{pmatrix}$ )。

**命题4.3.** 若  $Q = (q_{ij}), i, j \in E$  是准转移阵, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n Q^v = \tilde{\Pi}$  存在且具有  $\Pi$  结构, ( $Q^v$  是  $Q$  的  $v$  次幂).

**证** 令  $\Delta$  是  $E$  外之一点,  $E_\Delta = E \cup \{\Delta\}$ , ( $\{\Delta\}$  表由  $\Delta$  构成的单点集),  $b = 1 - Q1$ , 则  $Q_\Delta = \begin{pmatrix} Q & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  是定义在  $E_\Delta$  上的转移阵. 由

定理4.5知  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n Q_\Delta^v = \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n Q^v & b_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  存在且有  $\Pi$  结构, 故

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n Q^v$  存在也有  $\Pi$  结构.

**命题4.4.**  $Q$  是准转移阵且  $Q = Q^2$  的充要条件是  $Q$  具有  $\Pi$  结构.

**证** 充分性由  $\Pi$  结构之定义即得. 必要性由  $Q = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Q^i$  及命题4.3即得.

**命题4.5.**  $f_{i,J}^*$  ( $i \in E, J \subset E$ ) 具有下列性质:

(1)  $f_{i,\emptyset}^* = 0, f_{i,E}^* = 1, (i \in E)$ ;

(2)  $J_1 \subset J_2 \Rightarrow f_{i,J_1}^* \leq f_{i,J_2}^*$ ;

(3) 对  $f_{i,J}^*$  对  $J$  具有完全半可加性;

(4)  $\{J_v\}$  不交封闭集  $\Rightarrow f_{i, \bigcup_v J_v}^* = \sum f_{i,J_v}^*$ ;

(5)  $J \subset E$  固定, 或则  $f_{i,J}^* = 1$  (一切  $i \in E$ ), 或则  $\inf_{i \in \bar{J}} f_{i,J}^* = 0$ .

**证** (1)、(2) 显然成立.

(3)  $f_{i, J_1 \cup J_2}^* = P^i \left( \bigcup_v \left[ \bigcup_{j \in J_v} \right] \right)$

$$= P^i \left( \bigcup_v \bigcup_n \left[ J_v \right] \right), \quad (4.9)$$



所以  $f_{i, \bigcup J_\nu}^* \leq \sum_\nu f_{i, J_\nu}^*$ .

(4) 若  $\{J_\nu\}$  不交封闭, 则当  $\mu \neq \nu$  时,

$$P^i\left(\left(\bigcup_{\nu} \left[\frac{n}{J_\nu}\right]\right) \cap \left(\bigcup_{\mu} \left[\frac{n}{J_\mu}\right]\right)\right) = 0, \text{ 故由(4.9)即得(4).}$$

(5) 用(1.1)得:

$$\begin{aligned} 1 - f_{i, J}^* &= P^i\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \left[\frac{n}{J}\right]\right) \\ &= \sum_{i \in J} P^i\left(\left[\frac{1}{J}, \dots, \frac{n-1}{J}, \frac{n}{j}\right]\right) P^j\left(\left[\frac{1}{J}, \frac{2}{J}, \dots\right]\right) \\ &= \sum_{i \in \bar{J}} P^i\left(\left[\frac{1}{J}, \dots, \frac{n-1}{J}, \frac{n}{j}\right]\right) (1 - f_{i, J}^*) \\ &\leq P^i\left(\bigcap_{k=1}^n \left[\frac{k}{J}\right]\right) (1 - \inf_{i \in \bar{J}} f_{i, J}^*), \end{aligned}$$

令  $n \rightarrow \infty$  即得:  $1 - f_{i, J}^* \leq (1 - f_{i, J}^*) (1 - \inf_{i \in \bar{J}} f_{i, J}^*)$ , (5)得证.

令  $\gamma = \Pi \mathbf{1}$ , 则

$$\gamma = \begin{matrix} N \\ R^0 \\ R^+ \end{matrix} \begin{pmatrix} \sum_m a(m) \\ 0 \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

即是  $\gamma \text{ on } N = \sum_m a(m)$ ,  $\gamma \text{ on } R^0 = 0$ ,  $\gamma \text{ on } R^+ = \mathbf{1}$ ,  $a(m)$ ,  $\Pi$ 之定义见定理4.5。

本书中恒用  $(m)_J$  表示定义域为  $J$  的分量有界的列向量全体,  $(l)_J$  表示定义域为  $J$  的诸分量之绝对值之和收敛的行向量的全体, 若  $J = E$ , 则简记  $(m)_E$ 、 $(l)_E$  为  $(m)$ 、 $(l)$ 。用  $e_i$  ( $e'_i$ ) 表示对应于  $i$

的分量为1其它分量为0的列(行)向量, 其维数视需要而定。

**命题4.6.**  $\{e'_i \gamma, i \in E\}$  或则无0或则有无穷多个0。

**证** 若  $R^0$  不空, 则  $P$  on  $R^0$  是转移阵, 而  $\lim_{n \rightarrow \infty} (P^{(n)} \text{ on } R^0) = 0$ , 故  $R^0$  必为无穷集, 由(4.10)知  $\{e'_i \gamma, i \in E\}$  有无穷多个0。

若  $R^0$  是空集, 再设  $\{i | e'_i \gamma = 0, i \in E\} \neq \emptyset$ . 由(4.10)和命题4.5(4)及定理4.5知: 当  $i \in N$  时有  $e'_i \gamma = \sum_{j \in N} f_{ij, R^+}^* = f_{i, R^+}^*$ . 所以由

(4.10) 及  $R^0$  是空集知:  $\emptyset \neq \{i | e'_i \gamma = 0, i \in E\} = \{i | e'_i \gamma = 0, i \in \bar{R}^+\} = \{i | f_{i, R^+}^* = 0, i \in \bar{R}^+\} = \hat{R}^+ \bar{R}^+$ . ( $\hat{R}^+$  之定义见定义3.4)

若  $R^+$  是空集, 则  $e'_i \gamma = 0, (i \in E)$ , 命题4.6成立, 若  $R^+$  非空, 用命题3.1知  $\hat{R}^+ \bar{R}^+$  为封闭集, 故  $P$  on  $(\hat{R}^+ \bar{R}^+)$  是转移阵, 若注意  $\hat{R}^+ \bar{R}^+ \subset N$ , ( $\because R^0$  是空集)知  $\lim_{n \rightarrow \infty} (P \text{ on } \hat{R}^+ \bar{R}^+)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (P^{(n)} \text{ on } \hat{R}^+ \bar{R}^+) = 0$ , 所以  $\hat{R}^+ \bar{R}^+$  是无穷集, 命题4.6证毕。

**命题4.7.** 下列陈述等价:

- (1)  $\Pi$  是转移阵;
- (2)  $R^0 = \emptyset, f_{i, R^+}^* = 1, (i \in N)$ ;
- (3)  $\inf\{e'_i \gamma, i \in E\} > 0$ .

**证** 由(4.10)及  $e'_i \gamma = f_{i, R^+}^* (i \in N)$  知  $(1) \iff (2)$ . 而  $(1) \Rightarrow (3)$  显然, 下面证明  $(3) \Rightarrow (2)$ . 若(3)成立, 则  $R^0 = \emptyset, \inf_{i \in N} f_{i, R^+}^* = \inf_{i \in \bar{R}^+} f_{i, R^+}^* > 0$ , 用命题4.5(5)得  $f_{i, R^+}^* = 1$  (一切  $i \in E$ ), 故(2)成立。

由命题4.1, 4.7 及定理4.3 知: “ $\Pi = 1\pi', \pi'1 = 1, \pi' \geq 0 \iff R^0 = \emptyset$ , 恰有一正类, 且  $f_{i, R^+}^* = 1, (i \in N)$ 。”

**定义4.2.** 称转移阵  $P$  (或对应的  $P$  链) 是无耗损的, 如果  $\Pi$  是转移阵. 反之称  $P$  是耗损的。

**引理4.2.** 设  $\alpha'(n) = (a_0(n), a_1(n), \dots), \alpha' = (a_0, a_1, \dots)$ ,

$\alpha'(n) \geq 0, \alpha'(n)1 = 1, (n \geq 1), \beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \end{pmatrix}, \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha'(n) = \alpha'$ . 若

下列两条件之一成立:

$$(1) \limsup_{k \rightarrow \infty} \sum_{n \geq 1} a_i(n) = 0,$$

$$(2) \alpha'(n)\beta \leq c, (n \geq 1), \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k = +\infty, \beta \geq 0, \text{ 则 } \alpha'1 = 1.$$

**证** 设(1)成立, 则任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $k_0$ , 使  $\sup_{n \geq 1} \sum_{i=k_0}^{\infty} a_i(n) <$

$\frac{\varepsilon}{2}$ . 再用  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha'(n) = \alpha'$  得, 存在  $N_0$  使  $|\alpha_i(N_0) - \alpha_i| < \frac{\varepsilon}{2k_0}$ , ( $i =$

$1, 2, \dots, k_0$ ). 所以  $\alpha'1 \geq \sum_{i=1}^{k_0} \alpha_i \geq \sum_{i=1}^{k_0} \left( \alpha_i(N_0) - \frac{\varepsilon}{2k_0} \right) \geq 1 -$

$\sum_{i=k_0}^{\infty} \alpha_i(N_0) - \frac{\varepsilon}{2} > 1 - \varepsilon$ . 由  $\varepsilon$  之任意性得  $\alpha'1 \geq 1$ , 再用法都引理得

$\alpha'1 = 1$ .

设(2)成立. 则  $c \geq \sum_{i=k}^{\infty} a_i(n)\beta_i \geq (\inf_{i \geq k} \beta_i) \sum_{i=k}^{\infty} a_i(n)$ , 故

$\sup_{n \geq 1} \sum_{i=k}^{\infty} a_i(n) \leq c / \inf_{i \geq k} \beta_i$ , 由(2)即得(1). 引理4.2证毕.

**定理4.6.** 设  $E = \{0, 1, 2, \dots\}$ ,  $\beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \end{pmatrix} \geq 0$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k = \infty$ ,

$P\beta \leq \beta$ , 则  $P$  是无耗损的.

**证** 任取  $i \in E$  固定, 令  $\alpha'(n) = e'_i \left( \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n P^v \right)$ ,  $\alpha' = e'_i \Pi$ ,

用引理4.2(2)即得  $\alpha'1 = 1$ , 故  $\Pi 1 = 1$ . 定理得证.

**定理4.7.** 设  $E = \{0, 1, 2, \dots\}$ ,  $\beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \end{pmatrix} \geq 0$ ,  $\alpha$  是正实数,

$P\beta < \infty, e'P\beta \leq e'\beta - a$  (除去  $E$  中有限个  $i$ ), 则  $P$  是无耗损的。

**证** 由假设知: 存在  $b > 0$  使  $P\beta \leq \beta + b1$ , 故  $P^{(n)}\beta < \infty$ , ( $n \geq 1$ )。再用假设, 存在  $c > 0$  及一个列向量  $a$ ,  $a$  只有有限个分量为

1 其它为 0, 使  $P\beta \leq \beta - a1 + ca$ 。由  $P\beta + a1 \leq \beta + ca$  得  $\left(\frac{1}{n} \sum_{v=1}^n P^{(v)}\right)$

$P\beta + a1 \leq \left(\frac{1}{n} \sum_{v=1}^n P^{(v)}\right)\beta + c\left(\frac{1}{n} \sum_{v=1}^n P^{(v)}\right)a$ , 注意  $P^{(n)}\beta < \infty$  ( $n \geq$

1) 可得:  $a1 \leq \frac{1}{n}P\beta - \frac{1}{n}P^{(n+1)}\beta + c\left(\frac{1}{n} \sum_{v=1}^n P^{(v)}\right)a$ 。令  $n \rightarrow \infty$  即

得  $a1 \leq c\Pi a \leq c\Pi 1 = cr$ 。故  $\inf\{e'_i r, i \in E\} \geq \frac{a}{c} > 0$ , 所以由命题 4.7

知  $P$  是无耗损的。

**定义 4.3.** 称分布行  $\beta'$  ( $\beta' \geq 0, \beta'1 = 1$ ) 是转移阵  $P$  (或对应的  $P$  链) 的平稳分布或不变测度或谐测, 如果  $\beta'P = \beta'$ 。

称 “ $x'P = x', x' \in (l), x' \geq 0$ ” 为左方程。

**定理 4.8.** 下列四条陈述等价:

- (1) 方程 “ $x'P = x', x' \in (l),$ ” 有非 0 解;
- (2) 有正状态存在;
- (3) 左方程有非 0 解;
- (4)  $P$  有平稳分布存在。

**证** 先考察 “ $x'P = x', x' \in (l)$ ” 的通解。用控制收敛定理可得: 若  $x'P = x', x' \in (l)$ , 则  $x'\Pi = x', x' \in (l)$ 。再用定理 4.5 得:  $x'$  on  $(N \cup R^0)$  为 0, 若记  $x'$  on  $R_+^+$  为  $s'_n$ , 则再用定理 4.5 有

$$x' = (0, 0, s'_1, s'_2, \dots) = (0, 0, s'_1, s'_2, \dots)\Pi$$

$$= (0, 0, s'_1, s'_2, \dots) \begin{pmatrix} 0 & 0 & a(1)\pi'(1) & a(2)\pi'(2) & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1\pi'(1) & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1\pi'(2) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{pmatrix}$$

$$= (0, 0, s_1 \pi'(1), s_2 \pi'(2), \dots),$$

即  $x' \text{ on } (N \cup R^0) = 0$ ,  $x' \text{ on } R_n^+ = s_n \pi'(n)$ ,  $s_n = s'_n 1$ ,  $\sum_n |s_n| < \infty$ .

反之, 任给满足上述要求之  $x'$ , 必满足

$x'P = x'$ ,  $x' \in (l)$ , 故 “ $x'P = x'$ ,  $x' \in (l)$ ” 之通解为:

$$N \quad R^0 \quad R_1^+ \quad R_2^+ \quad \dots$$

$$\begin{cases} x' = (0, 0, s_1 \pi'(1), s_2 \pi'(2), \dots) \\ \sum_n |s_n| < \infty. \end{cases} \quad (4.11)$$

(1) $\Rightarrow$ (2) 由通解之形状立得。

(2) $\Rightarrow$ (3) 在 (4.11) 中取  $s_1 > 0$ ,  $s_i = 0$ , ( $i > 1$ ) 即为左方程之非 0 解。

(3) $\Rightarrow$ (4). 设  $x'$  是左方程之非 0 解, 取  $\beta' = \frac{1}{x'_1} x'$  即为  $P$  之平稳分布。

(4) $\Rightarrow$ (1), 显然。

**定理 4.9.** 若  $P$  是不可约的, 则

(1) 左方程只有零解  $\Rightarrow \Pi = 0$ ;

(2) 左方程有非零解  $\Rightarrow \Pi = 1\pi'$ , 其中  $\pi' = \frac{1}{x'_1} x'$ ,  $x'$  是

左方程之唯一非零解 (常因子除外),  $E = R_1^+$ , 且  $\pi'$  是  $P$  的唯一的平稳分布。

**证** (1) 由左方程只有零解, 用定理 4.8 知: 无正状态, 故  $\Pi = 0$ 。

(2) 由左方程有非零解知有正状态存在, 而  $P$  不可约, 故  $E = R_1^+$ . 故左方程之非 0 解为:  $x' = s_1 \pi'(1)$ ,  $s_1 > 0$ , 而  $\Pi = 1\pi'(1)$ , 故  $\Pi = 1 \left( \frac{1}{x'_1} x' \right)$ . 由  $\Pi P = \Pi$  知  $\pi' = \pi'(1)$  是  $P$  的唯一的平稳分布。

对一般的转移阵 $P$ 而言(可能是可约的),解左方程,其通解必为0的地方对应的状态就是 $N \cup R^0$ ,其余的地方就是 $R_1^+, R_2^+, \dots$ ,而且 $\pi'(n)$ 也得出了。根据定理4.5 $\Pi$ 的结构,只须求出 $a(m)$ , $\Pi$ 就完全求出了。下述定理就回答了 $a(m)$ 的求法。

**定理4.10.** 对任何转移阵 $P$ 而言,

$$\begin{matrix} N \\ R^0 \\ \bigcup_{s < m} R_s^+ \\ R_m^- \\ \bigcup_{s > m} R_s^- \end{matrix} \begin{pmatrix} a(m) \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ 是 } \ll P \begin{pmatrix} y \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq y \leq 1 \gg \text{ 的最小}$$

解。

**证** 由 $P\Pi = \Pi$ 并应用定理4.5 $\Pi$ 的结构再注意 $\pi'(m) > 0$ 即可发现它是解。再证最小性。任取上方程一个解

$$\begin{pmatrix} y \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq y \leq 1,$$

必有

$$\begin{pmatrix} y \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left( \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n P^v \right) \begin{pmatrix} y \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

令 $n \rightarrow \infty$ 并用法都引理及定理4.5 $\Pi$ 的结构可得,

$$\begin{pmatrix} y \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H} \begin{pmatrix} y \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{B} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{a(m)} \begin{pmatrix} a(m) \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

至此,  $H$  的求法及  $N \cup R^0$  与  $\bigcup_n R_n^+$  的区分已经解决. 本节最后一个问题就是要区分  $N$  与  $R^0$ .

**命题 4.8.** 任取  $J \subseteq E$ ,  $J \neq \emptyset$ ,  $A = PonJ$ , 则

- (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n \mathbf{1} = a$  存在;
- (2)  $Aa = a$ , 且  $a$  是  $\langle Ay = y, 0 \leq y \leq 1 \rangle$  的最大解;
- (3)  $a_i = e'_i a = 1 - f_{i, \bar{J}}$ , ( $i \in J$ );

(4) 令  $\tilde{a}_i = a_i$  ( $i \in J$ ),  $\tilde{a}_i = 0$ , ( $i \in \bar{J}$ ),  $\tilde{a} = \left( \tilde{a}_i \right)_{i \in E}$ , 则  $e'_i(P\tilde{a}) = 1 - f_{i, \bar{J}}$ , ( $i \in E$ ).

**证** 任取  $i \in J$ , 则由测度  $P^i$  的定义有  $e'_i(A^n \mathbf{1}) = P^i \left( \bigcap_{k=1}^n \left[ \begin{smallmatrix} k \\ J \end{smallmatrix} \right] \right)$ ,

故(1)、(3)得证. 再证(2). 用控制收敛定理得  $Aa = A \lim_{n \rightarrow \infty} A^n \mathbf{1} = \lim_{n \rightarrow \infty} A^{n+1} \mathbf{1} = a$ . 若  $Ay = y$ ,  $0 \leq y \leq 1$ , 则  $y = A^n y \leq A^n \mathbf{1}$ , 从而  $y \leq \lim_{n \rightarrow \infty} A^n \mathbf{1} = a$ , (2)得证. 最后证(4). 用(3)有

$$\begin{aligned} 1 - f_{i, \bar{J}} &= P^i \left( \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[ \begin{smallmatrix} n \\ J \end{smallmatrix} \right] \right) \\ &= \sum_{j \in J} p_{i,j} P^j \left( \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[ \begin{smallmatrix} n \\ J \end{smallmatrix} \right] \right) \\ &= \sum_{j \in J} p_{i,j} (1 - f_{j, \bar{J}}) \\ &= \sum_{j \in J} p_{i,j} (e'_j a) \end{aligned}$$

$$= \sum_{j \in E} p_i : \tilde{a}_j \\ = e'_i (P \tilde{a}).$$

**命题4.9.** 下列陈述等价:

- (1)  $f^*_{i, \bar{J}} = 1, (i \in E);$
- (2)  $f^*_{i, \bar{J}} = 1, (i \in J);$
- (3)  $a = 0, (a\text{之定义见命题4.8});$
- (4)  $\langle\langle Ay = y, y \geq 0, y \in (m) \rangle\rangle$  只有0解。

**证** (1) $\Rightarrow$ (2)显然。(2) $\Rightarrow$ (3), 只须注意  $e'_i a = 1 - f^*_{i, \bar{J}} (i \in J)$ 。(3) $\Rightarrow$ (4), 设  $y$  为方程之解, 不妨令  $Ay = y, 0 \leq y \leq 1$ , 由命题4.8(2)有  $0 \leq y \leq a$ , 而今设  $a = 0$ , 故  $y = 0$ , (4)成立。(4) $\Rightarrow$ (1)。由(4)成立, 再用命题4.8(2)得  $a = 0$ , 从而  $P \tilde{a} = 0$ 。但  $e'_i P \tilde{a} = 1 - f^*_{i, \bar{J}}, (i \in E)$ , 所以  $f^*_{i, \bar{J}} = 1, (i \in E)$ 。

**系1.** 设  $A$  为状态  $j$  之余阵, 即是  $A = Pon(E - \{j\})$ , 则下列陈述等价:

- (1)  $f^*_{i, j} = 1, (i \in E);$
- (2)  $f^*_{i, j} = 1, (i \neq j);$
- (3)  $a = 0, (a = \lim_{r \rightarrow \infty} A^r 1);$
- (4)  $\langle\langle Ay = y, y \geq 0, y \in (m) \rangle\rangle$  只有0解。

**定理4.11.** 任取状态  $j$ , 设  $A$  为  $j$  之余阵, 则

- (1)  $\langle\langle Ay = y, y \geq 0, y \in (m) \rangle\rangle$  只有0解  $\Rightarrow j$  是常返状态;
- (2)  $\langle\langle Ay = y, y \geq 0, y \in (m) \rangle\rangle$  有非0解, 且  $P$  不可约  $\Rightarrow j$  是滑过状态。

**证** 由命题4.9系1中(1) $\iff$ (4)即得本定理的(1)。再证(2)。若  $P$  不可约,  $j$  是常返状态, 则  $f^*_{i, j} = 1 (i \in E)$ , 再用命题4.9的系知  $\langle\langle Ay = y, y \geq 0, y \in (m) \rangle\rangle$  只有0解, (2)证毕。

我们称  $\langle\langle Py = y, y \geq 0, y \in (m) \rangle\rangle$  为右方程。如  $A$  为  $j$  之余阵, 即  $A = Pon(E - \{j\})$ , 则称  $\langle\langle Ay = y, y \geq 0, y \in (m) \rangle\rangle$  为  $j$  右方程, 引进



条件(LC): 左方程有非0解;

条件(RC)<sub>j</sub>: j右方程有非0解;

条件(RC): 右方程有非0解。

$(\overline{LC})$  ( $(\overline{RC})$ 、 $(\overline{RC})_j$ )表(LC) ((RC)、(RC)<sub>j</sub>)之逆。

**定理4.12.** 设P不可约, 则

(1)  $(LC) \iff E = R_1^+ \Rightarrow (\overline{RC})_j$ , (一切  $j \in E$ );

(2)  $(LC), (RC)_j$  (对某个  $j \in E$ )  $\iff (\overline{LC}), (\overline{RC})_j$   
(对一切  $j \in E$ )  $\iff E = R_1^0$ ;

(3)  $(RC)_j$  (对某个  $j \in E$ )  $\iff (RC)_i$  (对一切  $j \in E$ )  $\iff E = N_0$ 。

**证** 由定理4.11及左方程之通解的形式即得定理4.12。

**定理4.13.** 下列陈述等价:

(1) E不是一个常返类;

(2)  $\langle Py \leq y, y \geq 0, y \in (m) \rangle$  有非常向量解;

(3)  $\langle Py \leq y, y \geq 0 \rangle$  有非常向量解。

(常向量者, 即诸分量相等之向量)。

**证** (1) $\Rightarrow$ (2)。先设E有滑过状态。不妨令  $E = \{0, 1, 2, \dots\}$ , 0是滑过状态。取

$$\tilde{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ f_{1,0}^* \\ f_{2,0}^* \\ \vdots \end{pmatrix},$$

由命题2.8有  $P\tilde{y} = \begin{pmatrix} f_{0,0}^* \\ f_{1,0}^* \\ \vdots \end{pmatrix} \leq \tilde{y}$ 。显然  $f_{i,0}^* (i \geq 1)$  不能全是1 (否则

由命题4.9的系得  $f_{0,0}^* = 1$ , 这与0是滑过状态矛盾), 而且由  $f_{0,0}^* < 1$  知  $P\tilde{y} \neq \tilde{y}$ 。总之, 当E有滑过状态时,

$\langle Py \leq y, y \geq 0, y \in (m), Py \neq y \rangle$

有非常向量解  $\tilde{y}$ 。

再设 $E$ 无滑过状态, 由(1)成立和 $E$ 至少含两个常返类, 不妨令 $R_1^+, R_2^+$ 非空, 取向量 $y^*$ 满足:  $e_i' y^* = c_1 \geq 0$ , ( $i \in R_1^+$ ),  $e_j' y^* = c_2 \geq 0$ , ( $j \in R_2^+$ ),  $c_1 \neq c_2$ ,  $e_k' y^* = 0$ , ( $k \in E - (R_1^+ \cup R_2^+)$ ), 则 $Py^* = y^*$ 。故

$$\langle Py \leq y, y \geq 0, y \in (m) \rangle$$

有非常向量解 $y^*$ , (1) $\Rightarrow$ (2)证毕

(2) $\Rightarrow$ (3)。显然。

(3) $\Rightarrow$ (1)。令 $E = \{0, 1, 2, \dots\}$ ,  $\tilde{P} = (\tilde{p}_{i,j}, i, j \in E)$ ,  $\tilde{p}_{0,0} = 1$ ,  $\tilde{p}_{0,j} = 0$ , ( $j \geq 1$ ),  $\tilde{p}_{i,j} = p_{i,j}$  ( $i \geq 1, j \in E$ ),  $\tilde{\Pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n \tilde{P}^{(v)}$ ,  $A = \text{Pon}(E - \{0\}) = \tilde{P} \text{on}(E - \{0\})$ , 则

$$\tilde{P}^{(n)} e_0 = \tilde{P}^{(n)} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ A^n 1 \end{pmatrix}.$$

由命题4.8(1)及(3)得 (取 $\{0\}$ 为那儿的 $\tilde{J}$ ):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{P}^{(n)} e_0 = \tilde{y}, \text{ (}\tilde{y}\text{之定义见前)}$$

从而 $\tilde{\Pi} e_0 = \tilde{y}$ 。下面证明:  $\tilde{y}$ 是 $\langle Py \leq y, y \geq 0, e_0' y = 1 \rangle$ 的最小解。 $\tilde{y}$ 是解在(1) $\Rightarrow$ (2)的证明中已证。再证最小性, 若 $y \geq 0$ ,  $e_0' y$

$$= 1, y \geq Py, \text{ 则 } y \geq \tilde{P}y \geq \dots \geq \tilde{P}^{(n)}y, \text{ 从而 } y \geq \left( \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n \tilde{P}^{(v)} \right) y,$$

令 $n \rightarrow \infty$ 用法都引理得 $y \geq \tilde{\Pi} y \geq \tilde{\Pi} e_0 = \tilde{y}$ 。最小性证毕。现在设(3)成立, 即存在 $y \geq 0$ ,  $y \geq Py$ ,  $y$ 是非常向量。不妨令 $e_0' y > e_1' y$ 。又不妨令 $e_0' y = 1 > e_1' y$  (否则以 $e_0' y$ 除此向量)。由 $\tilde{y}$ 之最小性知 $\tilde{y} \leq y$ , 更有 $f_{1,0} = e_1' \tilde{y} \leq e_1' y < 1$ , 所以 $E$ 不是一个常返类。定理证毕。

**定理4.14.** 下列陈述等价:

- (1)  $E$ 有滑过状态;
- (2)  $\langle Py \leq y, y \geq 0, y \in (m), Py \neq y \rangle$ 有解;
- (3)  $\langle Py \leq y, y \geq 0, Py \neq y \rangle$ 有解。

证 (1)  $\Rightarrow$  (2)。(定理4.13的(1)  $\Rightarrow$  (2)中已证)。

“(2)  $\Rightarrow$  (3)”显然成立。

(3)  $\Rightarrow$  (1)。设  $y \geq Py$ ,  $y \geq 0$ ,  $Py \neq y$ 。作

$P^* = \text{diag}([1 + e'_i y]^{-1}, i \in E) P \text{diag}([1 + e'_i y], i \in E)$ , (其中  $\text{diag}(q_i, i \in E)$  表对角矩阵, 主对角线上对应于  $i$  的元素为  $q_i$ 。)

则  $e'_i P^{(v)} e_i = e'_i (P^*)^v e_i$ ,  $\left( \begin{array}{c} v \geq 0 \\ i \in E \end{array} \right)$  且

$$\begin{aligned} P^* 1 &= \text{diag}([1 + e'_i y]^{-1}, i \in E) P(1 + y) \\ &\leq \text{diag}([1 + e'_i y]^{-1}, i \in E) (1 + y) = 1, \end{aligned}$$

由  $Py \leq y$ ,  $Py \neq y$  知上式中等号不能成立, 故

$$1 - P^* 1 \geq 0, \quad 1 - P^* 1 \neq 0,$$

所以存在  $i_0 \in E$  及正数  $c$  使  $1 - P^* 1 \geq c e_{i_0}$ 。因此  $1 \geq \sum_{v=0}^{n-1} (P^*)^v (1 -$

$$P^* 1) \geq c \sum_{v=0}^{n-1} (P^*)^v e_{i_0}。特别地, 有 1 \geq e'_{i_0} c \sum_{v=0}^{n-1} (P^*)^v e_{i_0} =$$

$$c \sum_{v=0}^{n-1} e'_{i_0} P^{(v)} e_{i_0} = c \sum_{v=0}^{n-1} p_{i_0, i_0}^{(v)}, (n \geq 1)。所以 \sum_{v=0}^{\infty} p_{i_0, i_0}^{(v)} < \infty, 即 i_0$$

是滑过状态。

**定理4.15.** 设  $\tilde{P}$  如定理4.13所定义, 若  $\tilde{P}$  是无耗损的, 则  $P$  有常返状态。

证  $E = \{0, 1, 2, \dots\}$ , 若  $1, 2, \dots$  都是  $P$  的滑过状态, 则

$\sum_{n=0}^{\infty} p_{i_i}^{(n)} < \infty, (i \geq 1)$ 。又由  $\tilde{P}$  之定义知  $\tilde{p}_{i_i}^{(n)} \leq p_{i_i}^{(n)}, (i \geq 1, n \geq 0)$ , 所以  $1, 2, \dots$  都是  $\tilde{P}$  的滑过状态, 所以  $\tilde{\pi} e_i = 0, (i \geq 1)$ ,

$$\text{从而由 } \tilde{P} \text{ 之无耗损性得 } 1 = \tilde{\pi} 1 = \tilde{\pi} \sum_{i \in E} e_i = \tilde{\pi} e_0 = \tilde{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ f_{0,1} \\ f_{0,2} \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

所以  $f_{i,1}^* = 1, (i \geq 1)$ , 再用命题4.9的系得  $f_{0,0}^* = 1$ , 此即0是常返状态。

## §5. 例 子

在这一节中, 仍设  $E$  是可数集,  $P = (p_{ij}), i, j \in E$  是  $E$  上的转移阵,  $P^{(n)} = (p_{ij}^{(n)}), i, j \in E$  是  $n$  步转移阵.  $\Pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{s=1}^n P^{(s)}, E = N \cup R = N \cup R^0 \cup R^+ = N \cup (\cup R_i^0) \cup (\cup R_i^+).$

本节主要研究二类问题? 一是: 当  $E$  为有限集时,  $P$  之状态空间  $E$  及  $\Pi$  有何特性; 二是: 当  $E$  为可数无穷集时, 有各种实际背景的特殊  $P$  的状态空间  $E$  及  $\Pi$  的特性及  $\Pi$  的求法。

先设  $E$  是有限集,  $P$  是  $E$  上之转移阵, 有

**命题5.1.**  $R^0 = \phi, R^+ \neq \phi.$

**证** 由  $E$  为有限集和  $\Pi$  是转移阵, 再用定理4.5  $\Pi$  的结构即得命题5.1。

**命题5.2.** 下列二条件等价:

(1)  $\Pi$  没有0列; (2)  $E$  没有滑过状态。

**证** 由  $R^0 = \phi$  及定理4.5即得。

**命题5.3.** 下列两条件等价: (1)  $\Pi$  行行一样, 即  $\Pi = \mathbf{1}\pi'$ ; (2)  $E$  恰含一个正类 ( $N$  可能非空)。

**证** “(1)  $\Rightarrow$  (2)” 乃显然。(2)  $\Rightarrow$  (1), 设  $E = R_1^+ \cup N$ , 若  $N = \emptyset$ , 由定理4.5得  $\Pi$  行行一样, 若  $N \neq \emptyset$ , 取  $i \in N$ , 由  $\Pi \mathbf{1} = \mathbf{1}$  及命题4.7有  $f_{i,R_1}^* = 1$ , 故再用定理4.5知  $\Pi$  行行一样。

**命题5.4.** 下列五条件等价:

(1)  $\Pi > 0$ ;

(2) 对任何  $i, j \in E$ , 存在正整数  $n$  (可依赖  $i, j$ ), 使  $p_{ij}^{(n)} > 0$ ;

(3)  $P$  是不可约的;

(4)  $E = R_1^+$ ;

(5)  $\Pi > 0$ , 且  $\Pi = \mathbf{1}\pi'$  行行一样。

证 (1)  $\Rightarrow$  (2) 给定  $i, j$ , 若  $p_{i,j}^{(n)} = 0$ , (一切  $n \geq 1$ ), 则  $\pi_{i,j} =$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n p_{i,j}^{(v)} = 0, \text{ 故 } (1) \Rightarrow (2).$$

(2)  $\Rightarrow$  (3) 由 (2) 得  $f_{i,j}^* > 0$ , (一切  $i, j \in E$ ), 故  $P$  不可约。

(3)  $\Rightarrow$  (4) 由命题 5.1 及定理 3.2 即得。

(4)  $\Rightarrow$  (5) 由定理 4.5 即得。

(5)  $\Rightarrow$  (1) 显然。

**命题 5.5.** 下列二条件等价:

(1)  $P$  不可约且周期  $d = 1$ ;

(2) 存在正整数  $M$ , 使  $P^{(M)} > 0$ 。

证 (1)  $\Rightarrow$  (2)。由  $P$  不可约及命题 5.4 知  $\pi_{i,j} > 0$ , 由  $d = 1$  知  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{i,j}^{(n)} = \pi_{i,j}$ , ( $i, j \in E$ )。注意  $E$  为有限集可知  $\exists M$ , 当  $n \geq M$  有  $p_{i,j}^{(n)} > 0$ , ( $i, j \in E$ )。

(2)  $\Rightarrow$  (1)。若  $P$  可约, 或  $P$  不可约但  $d > 1$ , 由定理 3.2 及 3.3 看出无论  $n$  为何数,  $P^{(n)}$  总有 0 元素。

**命题 5.6.** 设  $E$  恰含  $S$  个元素, 则

(1)  $f_{i,i}^* > 0 \Rightarrow$  存在正整数  $m \leq S$ , 使  $p_{i,i}^{(m)} > 0$ ;

(2)  $f_{i,i}^* > 0, i \neq j \Rightarrow$  存在正整数  $m \leq S - 1$ , 使  $p_{i,i}^{(m)} > 0$ 。

证 由矩阵论 Cayley 定理,  $P^{(S)}$  可表成  $I, P, \dots, P^{(S-1)}$  的线性组合 ( $I$  是单位阵), 从而对任何  $n \geq S$ ,  $P^{(n)}$  亦也表为  $I, P, \dots,$

$P^{(S-1)}$  的线性组合, 令  $P^{(n)} = \sum_{i=1}^S C_{n,i} P^{(S-i)}$ , ( $n \geq S$ )。若  $i \neq j$  且

$p_{i,j}^{(v)} = 0$ , ( $v = 1, 2, \dots, S-1$ ), 则  $p_{i,j}^{(n)} = 0$ , (一切  $n \geq 1$ ), 故  $f_{i,j}^*$

$= 0$ 。(2) 得证。由  $P^{(n+1)} = \sum_{i=1}^S C_{n,i} P^{(S+1-i)}$  知: 若  $p_{i,i}^{(v)} = 0$ , ( $v = 1,$

$2, \dots, S$ ), 则  $p_{i,i}^{(n)} = 0$ , (一切  $n \geq 1$ ), 从而  $f_{i,i}^* = 0$ , 故 (1) 得证。

**命题 5.7.** 1 是  $P$  的特征根且对  $P$  的任何特征根  $\lambda$ , 都有  $|\lambda| \leq 1$ 。

**证** 由  $(I-P)1=0$  知 1 是  $P$  之特征根. 再设  $\lambda$  是  $P$  之特征根, 则有  $x'$  使:  $x'(\lambda I - P) = 0$ ,  $x' \neq 0$ ,  $x' = (x_i, i \in E)$ .

由  $\lambda x_i = \sum_{j \in E} x_j p_{i,j}$ , ( $i \in E$ ) 得:

$$|\lambda| \sum_{i \in E} |x_i| \leq \sum_{i \in E} |x_i| \sum_{j \in E} p_{i,j} = \sum_{i \in E} |x_i|,$$

故  $|\lambda| \leq 1$ .

**命题 5.8.**  $\Pi = \lim_{\lambda \rightarrow 1-0} (1-\lambda)(I-\lambda P)^{-1}$ .

**证** 由命题 5.7,  $P$  之任一特征根之模皆不大于 1, 所以

$(I-\lambda P)^{-1}$  存在 (当  $\lambda < 1$ ), 且  $(I-\lambda P)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n P^n$ . 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{v=0}^{n-1} P^v = \Pi,$$

所以

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1-0} (1-\lambda) \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n P^n = \Pi.$$

命题得证.

**例 5.1.** 自由随机徘徊, 设  $E = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ ,  $P = (p_{i,j}, i, j \in E)$ ,  $p_{i,i-1} = q_i, p_{i,i+1} = p_i, p_i > 0, q_i > 0, p_i + q_i = 1, (i \in E)$ ,  $p_{i,j} = 0$  (当  $|i-j| > 1$  或  $i=j$ ).

显然  $P$  是不可约的, 周期  $d=2$ . 解  $x'P = x'$ , (记  $x' = (x_i, i \in E)$ ) 得:

$$(p_{i-1}x_{i-1} - q_i x_i) = (p_i x_i - q_{i+1} x_{i+1}) = c, (i \in E).$$

所以由  $Mc = \sum_{i=-1}^M (p_{i-1}x_{i-1} - q_i x_i)$  得  $|Mc| \leq 2 \sum_{i=0}^M |x_i|$ , ( $M \geq 1$ ).

因此  $\ll x' = x'P, x' \in (l) \gg$  的通解为:

$$(p_{i-1}x_{i-1} - q_i x_i) = 0, (i \in E),$$

即是:

$$x_i = \frac{p_0 p_1 \cdots p_{i-1}}{q_1 q_2 \cdots q_i} x_0, \quad (i > 0)$$

$$x_{-i} = \frac{q_0 q_{-1} \cdots q_{-i+1}}{p_{-1} p_{-2} \cdots p_{-i}} x_0, \quad (i > 0).$$

令

$$\delta = \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{p_0 p_1 \cdots p_{i-1}}{q_1 q_2 \cdots q_i} + \frac{q_0 q_{-1} \cdots q_{-i+1}}{p_{-1} p_{-2} \cdots p_{-i}} \right),$$

从  $x'P = x'$ ,  $x' \in (l)$  的通解的形式看出:

当  $\delta = \infty$  时, 左方程只有 0 解, 故  $H = 0$ ;

当  $\delta < \infty$  时, 左方程有非 0 解  $x' = (x_i, i \in E)$ , 其中  $x_0 = 1$ ,

$$x_i = \frac{p_0 p_1 \cdots p_{i-1}}{q_1 q_2 \cdots q_i}, \quad (i > 0), \quad x_{-i} = \frac{p_0 q_{-1} \cdots q_{-i+1}}{p_{-1} p_{-2} \cdots p_{-i}}, \quad (i > 0), \text{ 所}$$

$$\text{以 } H = \frac{1}{x'1} 1x' = \frac{1}{1+\delta} 1x'.$$

考虑  $A = \text{Pon}(E - \{0\})$  为 0 之余阵, 解 0 右方程  $Ay = y$ ,

$y \geq 0, y \in (m) \gg_0$ . 由  $Ay = y$  得: (令  $y = \begin{pmatrix} y_i \\ i \in E - \{0\} \end{pmatrix}$ )

$$y_{i+1} = \left( 1 + \frac{q_1}{p_1} + \cdots + \frac{q_1 \cdots q_i}{p_1 \cdots p_i} \right) y_i, \quad i \geq 1,$$

$$y_{-(i+1)} = \left( \frac{1+p_{-1}}{q_{-1}} + \cdots + \frac{p_{-1} \cdots p_{-i-1}}{q_{-1} \cdots q_{-i-1}} \right) y_{-i}, \quad i \geq 1.$$

令

$$\theta_1 = \left( 1 + \frac{q_1}{p_1} + \cdots + \frac{q_1 \cdots q_i}{p_1 \cdots p_i} + \cdots \right), \quad \theta_2 = \left( 1 + \frac{p_{-1}}{q_{-1}} + \cdots + \right.$$

$$\left. \frac{p_{-1} \cdots p_{-i-1}}{q_{-1} \cdots q_{-i-1}} + \cdots \right), \text{ 则由定理 4.12 有:}$$

$$\delta < \infty (\text{即 } (Lc)) \iff E = R_1^-;$$

$$\delta = \infty, \quad \theta_1 = \theta_2 = \infty (\text{即 } (\overline{Lc}), (\overline{Rc})_0) \iff E = R_1^0;$$

$$\theta_1, \theta_2 \text{ 中至少有一个有限 (即 } (Rc)_0) \iff E = N.$$

**例5.2.**  $O$ 处有反射屏的随机徘徊。设  $E = \{0, 1, 2, \dots\}$ ,  $P = (p_{ij}), i, j \in E$ ,  $p_{0,0} = a_0, p_{0,1} = b_0, p_{0,j} = 0, (j > 1)$ , 当  $i \geq 1$  时:  $p_{i,i-1} = a_i, p_{i,i+1} = b_i, p_{i,j} = 0 (i = j \text{ 或 } |i-j| > 1)$ .  $a_i + b_i = 1 (i \in E), a_i > 0, (i \geq 1), b_i > 0 (i \geq 0)$ .

显然  $P$  是不可约的。解  $x' = x'P, (x' = (x_0, x_1, \dots))$ , 即

$$(x_0, x_1, x_2, \dots) \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 & 0 & \dots \\ a_1 & 0 & b_1 & 0 & \dots \\ 0 & a_2 & 0 & b_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{pmatrix} = (x_0, x_1, x_2, \dots)$$

得,

$$x_{n+1} = \frac{b_n b_{n-1} \dots b_0}{a_{n+1} a_n \dots a_1} x_0, (n \geq 0).$$

令  $\delta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n b_{n-1} \dots b_0}{a_{n+1} a_n \dots a_1}$ , 则  $\delta < \infty \iff (Lc)$ . 故

$$\delta = \infty \Rightarrow H = 0,$$

$$\delta < \infty \Rightarrow H = 1\pi', \pi' = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots),$$

$$\pi_{n+1} = \frac{1}{1+\delta} \left( \frac{b_n b_{n+1} \dots b_0}{a_{n+1} a_n \dots a_1} \right), (n \geq 0), \pi_0 = 1/(1+\delta).$$

考虑  $A = Pon(E - \{0\})$  为  $O$  的余阵。解  $O$  右方程  $\ll Ay = y, y \geq 0, y \in (m) \gg$ . 记

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

由  $Ay = y$  得:  $y_2 - y_1 = \frac{a_1}{b_1} y_1, (y_{n+1} - y_n) = \frac{a_n}{b_n} (y_n - y_{n-1})$

$= \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{b_1 b_2 \dots b_n} y_1, (n \geq 2)$ , 故把上述各式求和即发现:



$$y_{n+1} = \left(1 + \frac{a_1}{b_1} + \cdots + \frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{b_1 b_2 \cdots b_n}\right) y_1, \quad (n \geq 1).$$

若令  $\theta = \left(1 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_1 a_2}{b_1 b_2} + \cdots\right)$  则  $\theta < \infty \iff 0$  右方程有非 0 解。

所以

$$\delta < \infty \iff E = R_1^+;$$

$$\delta = \infty, \quad \theta = \infty \iff E = R_1^0;$$

$$\theta < \infty \iff E = N.$$

**例 5.3.** 在  $O$  处具有吸收屏的随机徘徊。设  $E = \{0, 1, 2, \cdots\}$ ,  $P = (p_{i,j}, i, j \in E)$ ,  $p_{0,0} = 1, p_{0,j} = 0$ , 当  $i \geq 1$  时;  $p_{i,i-1} = q_i, p_{i,i+1} = p_i, p_{i,j} = 0$  (当  $i = j$  或  $|i - j| > 1$ ),  $p_i + q_i = 1, p_i > 0, q_i > 0$ .

显然  $P$  是可约的,  $0$  是正状态, 其它都是滑过状态, 因此  $\Pi = (\pi_{i,j}, i, j \in E)$  满足  $\pi_{0,0} = 1, \pi_{i,0} = a_i, (i \geq 1), \pi_{i,j} = 0, (i \in E, j \geq 1)$ , 即

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ a_1 & & & \\ a_2 & 0 & & \\ \vdots & & & \end{pmatrix}.$$

用定理 4.10,  $\begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$  是

$(U): \ll P \begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \end{pmatrix}, 0 \leq y_i \leq 1, (i \geq 1) \gg$  的最小解。解之得,

$$y_n = q_n y_{n-1} + p_n y_{n+1}, \quad (n \geq 1), \quad y_0 = 1.$$

即  $q_n(y_n - y_{n-1}) = p_n(y_{n+1} - y_n)$ , ( $n \geq 1$ ), 故

$$(y_{n+1} - y_n) = \frac{q_1 \cdots q_n}{p_1 \cdots p_n} (y_1 - 1), \quad (n \geq 1).$$

对  $n$  从 1 到  $k$  求和得:

$$(y_{k+1} - 1) = \left(1 + \sum_{n=1}^k \frac{q_1 \cdots q_n}{p_1 \cdots p_n}\right) (y_1 - 1), \quad (k \geq 1).$$

令  $\beta = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_1 \cdots q_n}{p_1 \cdots p_n}$ , 则

(1) 当  $\beta = \infty$  时, 方程 (U) 恰有唯一解

$$y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \end{pmatrix} = 1, \text{ 故 } \Pi = (1 \ 0), \text{ 且 } f_{i,0} = a_i = 1, (i \in E).$$

(2) 当  $\beta < \infty$  时, 对 (U) 的任一解  $y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \end{pmatrix}$ , 有  $0 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} y_k = 1$

$+ \beta(y_1 - 1)$ . 故  $y_1 \geq 1 - \frac{1}{\beta}$ , 从而  $y_{k+1} \geq 1 - \frac{1}{\beta} \left(1 + \sum_{n=1}^k \frac{q_1 \cdots q_n}{p_1 \cdots p_n}\right)$ ,

( $k \geq 1$ ). 显然

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} \bar{y}_0 \\ \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \frac{1}{\beta} \\ 1 - \frac{1}{\beta} \left(1 + \frac{q_1}{p_1}\right) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

是 (U) 之解, 所以  $\bar{y}$  是 (U) 之最小解. 故

$$\Pi = (\bar{y} \ 0).$$

特别地, 若  $q_i \equiv q$ ,  $p_i \equiv p$ , 则

(1)  $p \leq \frac{1}{2}$  时,  $\beta = \infty$ ,  $\Pi = (1 \ 0)$ ;

(2)  $p > \frac{1}{2}$  时,  $\Pi = (\bar{y} \ 0)$ ,

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ q/p \\ (q/p)^2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

**例5.4.** 更新过程, 设  $E = \{0, 1, 2, \dots\}$ ,  $P = (p_{i,j}, i, j \in E)$ ,  
 $p_{i,0} = q_i$ ,  $p_{i,i+1} = p_i$ ,  $p_{i,j} = 0$  ( $j \neq 0$  或  $i+1$ ),  $p_i > 0$ ,  $q_i > 0$ ,  
 $p_i + q_i = 1$  ( $i \in E$ ).

显然  $P$  是不可约的。解左方程, 发现:

(1) 当  $\delta = \sum_{i=0}^{\infty} p_0 p_1 \cdots p_i < \infty$  时, 左方程有非 0 解  $x' = (1,$

$p_0, p_0 p_1, \dots)$ , 故  $\Pi = 1 \left( \frac{1}{x'_1} \right) x' = \frac{1}{1+\delta} 1 x'$ .

(2) 当  $\delta = \infty$  时, 左方程只有 0 解,  $\Pi = 0$ .

考虑  $A = P \text{ on } (E - \{0\})$ , 解 0 右方程:

$$\langle Ay = y, y \geq 0, y \in (m) \rangle$$

发现: 当  $\theta = \prod_{i=0}^{\infty} p_i = 0$  时, 0 右方程只有 0 解, 当  $\theta > 0$  时, 0 右方

程有非 0 解。所以:

$$\delta < \infty \implies E = R_1^+,$$

$$\delta = \infty, \theta = 0 \implies E = R_1^0;$$

$$\delta = \infty, \theta > 0 \implies E = N_+.$$

直接计算可知:  $\langle Ay = y, 0 \leq y \leq 1 \rangle$  的最大解是  $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$ ,

$a_i = p_i p_{i+1} \cdots$ , ( $i \geq 1$ ), 所以由命题 4.8 得  $f_{1,0}^* = 1 - a_i$ , ( $i \geq 1$ ),  
 从而  $f_{0,0}^* = p_{0,0} + p_{0,1} f_{1,0}^* = q_0 + p_0(1 - a_1) = q_0 + p_0(1 - p_1 p_2 \cdots)$

$$= 1 - \prod_{i=0}^{\infty} p_i.$$

例5.5. 排队过程 (一) 设  $E = \{0, 1, 2, \dots\}$ ,  $P = (p_{i,j}, i, j \in E)$  是下列形状之转移阵:

$$P = \begin{pmatrix} k_0 & k_1 & k_2 & k_3 & \cdots \\ k_0 & k_1 & k_2 & k_3 & \cdots \\ 0 & k_0 & k_1 & k_2 & \cdots \\ 0 & 0 & k_0 & k_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{pmatrix},$$

$$k_0 > 0, \quad k_2 + k_3 + \cdots > 0, \quad \sum_{i=0}^{\infty} k_i = 1.$$

显然  $P$  是不可约的。令  $K(\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} k_i \lambda^i$ , ( $|\lambda| \leq 1$ ),  $X(\lambda)$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} x_i \lambda^i, \quad x' = (x_0, x_1, \dots) \in (l), \quad (|\lambda| \leq 1). \quad \text{解左方程 } \langle x' P$$

$= x', \quad x' \geq 0, x' \in (l) \rangle$  即等价于解母函数方程:

$$x' \Lambda = x' P \Lambda, \quad x' \geq 0, \quad x' \in (l), \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \end{pmatrix}. \quad \text{此即}$$

$$X(\lambda) = x' \begin{pmatrix} K(\lambda) \\ K(\lambda) \\ \lambda K(\lambda) \\ \lambda^2 K(\lambda) \\ \vdots \end{pmatrix},$$

化简之得:

$$X(\lambda) = x_0(1-\lambda)K(\lambda)/(K(\lambda)-\lambda), \quad |\lambda| < 1.$$

若左方程有非0解, 由上式得知  $x_0 > 0$ , 故由上式得

$$\lim_{\lambda \uparrow 1} \frac{K(\lambda) - \lambda}{1 - \lambda} = \lim_{\lambda \uparrow 1} \frac{x_0 K(\lambda)}{X(\lambda)} > 0,$$

此即  $\lim_{\lambda \uparrow 1} \frac{dK}{d\lambda} < 1$ . 反之若  $\lim_{\lambda \uparrow 1} \frac{dK}{d\lambda} < 1$ , 易证左方程有非0解  $x'$

$$\text{使 } x'A = X(\lambda) = \frac{(1-\lambda)K(\lambda)}{K(\lambda)-\lambda}.$$

所以:

$$(1) \text{ 当 } \lim_{\lambda \uparrow 1} \frac{dK}{d\lambda} \geq 1, \text{ 有 } \Pi = 0,$$

$$(2) \text{ 当 } \lim_{\lambda \uparrow 1} \frac{dK}{d\lambda} < 1, \text{ 有 } \Pi = 1\pi', \text{ 若记 } \Pi(\lambda) = \pi'A, \text{ 则}$$

$$\Pi(\lambda) = CX(\lambda) = \frac{C(1-\lambda)K(\lambda)}{K(\lambda)-\lambda}, \text{ 由 } \Pi(1) = \pi'1 = 1 \text{ 得 } c = 1$$

$$= \lim_{\lambda \uparrow 1} \frac{dK}{d\lambda}.$$

下面研究状态空间  $E$  的分类。

$$(1) \lim_{\lambda \uparrow 1} \frac{dK}{d\lambda} < 1, \iff E = R_1^+.$$

$$(2) \text{ 若 } \lim_{\lambda \uparrow 1} \frac{dK}{d\lambda} = 1, \text{ 考虑}$$

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ k_0 & k_1 & k_2 & k_3 & \cdots \\ 0 & k_0 & k_1 & k_2 & \cdots \\ 0 & 0 & k_0 & k_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{pmatrix},$$

则有

$$\tilde{P} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \end{pmatrix},$$

所以, 由定理4.6知  $\tilde{P}$  是无耗损, 再用定理4.15知  $P$  有常返状态, 由于  $P$  不可约, 再注意(1), 可知这时  $E = R_1^0$ .

(3) 若  $\lim_{\lambda \uparrow 1} \frac{dK}{d\lambda} > 1$ , 由  $k_0 > 0$ ,  $k_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=0}^{\infty} k_i = 1$  得知 (参

见 [72] P. 226 (第一版)) 存在  $0 < \alpha < 1$ , 使  $K(\alpha) = \alpha$ . 令

$$y = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad y \text{ 是非常向量, 且 } Py = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha^2 \\ \alpha^3 \\ \vdots \end{pmatrix} \leq y, \text{ 所以由定理4.13知}$$

$E$  不是一个常返类, 而今  $P$  不可约, 所以  $E = N$ .

例5.6. 排队过程(二) 设  $E = \{0, 1, 2, \dots\}$ ,  $P = (p_{ij})$ ,  $i, j \in E$  是下述形式的转移阵:

$$P = \begin{pmatrix} a_0 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_1 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_2 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \cdots \\ a_3 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{pmatrix},$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i = 1, \quad a_i = a_{i+1} + a_{i+2} + \cdots, \quad (i \geq 0), \quad a_0 > 0,$$

$$a_2 + a_3 + \cdots > 0.$$

显然,  $P$  是不可约的. 令  $A(\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \lambda^i$ ,  $\rho = \lim_{\lambda \uparrow 1} \frac{dA}{d\lambda}$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} i a_i = \sum_{i=0}^{\infty} a_i.$$

**引理5.1.** 若  $P$  不可约, 且存在  $x' = (x_i, i \in E)$ ,  $x' \geq 0$ ,  $\{x_i\}$  有界,  $\sum_{i \in E} x_i = \infty$ ,  $x'P \leq x'$ , 则  $E$  无正状态。

**证** 由  $x' \geq x'P$ , 得  $x' \geq x' \left( \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n P^{(r)} \right)$ . 再用  $x' \geq 0$ ,  $\{x_i\}$  有界得:  $x' \geq x' \Pi$ . 若  $E$  有正状态, 则由  $P$  不可约得  $\Pi = 1\pi'$  行行一样, 从而  $x' \geq x' 1\pi' = \left( \sum_{i=0}^{\infty} x_i \right) \pi'$ , 此为不可能。

用引理5.1来处理例5.6。

(1) 若  $\rho \leq 1$ , 记  $1' = (1, 1, \dots)$  是  $1$  之转置, 有

$$1'P = (\rho, 1, 1, \dots) \leq 1'.$$

所以由引理5.1知  $P$  无正状态, 故  $\Pi = 0$ .

(2) 若  $\rho > 1$ , 则必存在  $\theta$ ,  $0 < \theta < 1$ ,  $A(\theta) = \theta$ , 从而  $(1, \theta, \theta^2, \dots)P = (1, \theta, \theta^2, \dots)$ , 此即左方程有非0解, 故  $E = R_1^+$ ,

$\Pi = 1(1, \theta, \theta^2, \dots)(1 - \theta)$ . 注意: 由于  $\Pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n P^{(r)}$  唯一存

在, 故  $\theta$  也是唯一存在的。

考虑  $A = P \text{ on } (E - \{0\})$ , 解0右方程

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \cdots \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \end{pmatrix}, \\ y &= \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \geq 0, y \in (m)_{\geq}. \end{aligned}$$

令  $\Lambda' = (1, \lambda, \lambda^2 \dots)$ ,  $Y(\lambda) = \Lambda' y$ , 则由  $Ay = y$ ,  $y \geq 0$ ,  $y \in (m)$  得,

$$Y(\lambda) = \Lambda' Ay = \left( \frac{A(\lambda) - a_0}{\lambda}, \right. \\ \left. A(\lambda), \lambda A(\lambda), \lambda^2 A(\lambda), \dots \right) y.$$

即 
$$\lambda Y(\lambda) = A(\lambda) Y(\lambda) - a_0 y_0,$$

亦即 
$$(1 - \lambda) Y(\lambda) = \frac{a_0 y_0 (1 - \lambda)}{A(\lambda) - \lambda}, \quad \text{所以}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} (y_i - y_{i-1}) \lambda^i = \frac{a_0 y_0}{(a_0 - a_1 \lambda - a_2 \lambda^2 - \dots)},$$

$$(\text{定义 } y_{-1} = 0, \quad |\lambda| < 1).$$

显然, 0 右方程之任一解  $y$  都满足  $y_{i+1} \geq y_i$ , ( $i \geq 0$ ). 所以, 若 0 右方程有非 0 解  $y$ , 则  $\lim_{i \rightarrow \infty} y_i$  存在且  $> 0$ . 故把上式对  $\lambda \uparrow 1$  取极限即得,

$$\frac{a_0 y_0}{a_0 - (a_1 + a_2 + \dots)} = \lim_{\lambda \uparrow 1} \sum_{i=0}^{\infty} (y_i - y_{i-1}) \lambda^i \\ = \lim_{i \rightarrow \infty} y_i$$

是有限正数。因此, 若 0 右方程有非 0 解  $y$ , 则必有  $a_0 - (a_1 + a_2 + \dots) > 0$ , 此即  $\rho < 1$ . 所以,  $\rho \geq 1$  时, 0 右方程只有 0 解, 从而  $E$  无滑过状态。前已证明  $\rho > 1 \implies E = R_1^+$ , 所以  $\rho = 1 \implies E = R_1^0$ . 当  $\rho < 1$  时, 可证: 若  $Y(\lambda) = \frac{a_0 y_0}{A(\lambda) - \lambda}$ ,  $Y(\lambda) = \Lambda' y$ ,

则  $y$  是 0 右方程的非 0 解, 所以,  $\rho < 1 \implies E = N$ . 总之

$$\begin{aligned} \rho > 1 &\implies E = R_1^+, \\ \rho = 1 &\implies E = R_1^0, \\ \rho < 1 &\implies E = N. \end{aligned}$$



**例5.7.** 交换过程。设某容器内之质点，每隔一单位时间发生一次变化，已在其内之某质点可逃离此容器（其概率为 $q$ ）也可留在其内（其概率为 $p$ ），不在其内之质点也可进入其内，进入的个数服从参数为 $\lambda$ 的普哇松分布： $\{e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, k \geq 0\}$ 。假定各质点之出、入、留是相互独立的。若用 $\xi_n$ 表时刻 $n$ 此容器内之质点数，则 $\{\xi_n, n \geq 0\}$ 是一个马尔可夫链，其转移阵 $P = (p_{i,j}, i, j \geq 0)$ 如下：

$$\begin{aligned} p_{i,j} &= P(\xi_{n+1} = j \mid \xi_n = i) \\ &= \sum_{m+j=i} c_m^j p^m q^{j-m} e^{-\lambda} \frac{\lambda^j}{j!} \\ &= \sum_{m=0}^{\min(i,j)} c_m^i p^m q^{j-m} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{j-m}}{(j-m)!} \end{aligned}$$

( $p > 0, q > 0, p + q = 1, \lambda > 0, i, j \geq 0$ )，此处 $c_m^i$ 表 $i$ 个元素取 $m$ 的组合数。

显然  $p_{i,i} > 0, (i, j \geq 0)$ ，所以 $P$ 是不可约无周期的。

$$\text{解左方程 } \langle x' P = x', x' \geq 0, x' \in (l) \rangle. \text{ 令 } S = \begin{pmatrix} 1 \\ s \\ s^2 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad X(s)$$

$= x' S, \varphi_i(s) = e^{i(s-1)}(ps+q)^i \begin{pmatrix} i \geq 0, \\ 0 < s < 1 \end{pmatrix}$ 。则 $x'$ 是左方程之解的充要条件是：

$$x' \geq 0, x' \in (l),$$

$$\begin{aligned} X(s) &= x' P S = x' \begin{pmatrix} \varphi_0(s) \\ \varphi_1(s) \\ \vdots \end{pmatrix} \\ &= e^{i(s-1)} \sum_{i=0}^{\infty} x_i (ps+q)^i \end{aligned}$$

$$= e^{(ps+q)} X(ps+q).$$

若令  $Y(s) = e^{-\frac{\lambda s}{q}} X(s)$ , 则上式即是

$$Y(s) = Y(ps+q), \quad (0 < s < 1).$$

再令  $f(s) = ps+q$ ,  $f^n(s)$  为  $f$  的  $n$  重复合函数, 则由上式得:

$$Y(s) = Y(f(s)) = \cdots = Y(f^n(s)).$$

显然当  $0 < s < 1$  时  $s \leq f(s) \leq \cdots \leq f^n(s) \leq 1$ , 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(s) = \sigma$  存

在, 再由  $p\sigma + q = f(\sigma) = \sigma$  及  $p+q=1$  得  $\sigma=1$ . 所以

$Y(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} Y(f^n(s)) = Y(1) = c$ , 即是  $X(s) = ce^{\frac{\lambda s}{q}}$ . 因此左方程

有非 0 解, 所以  $E = R_1^+$ . 且  $\Pi = 1\pi'$ ,  $\pi' = e^{-\frac{1}{q}} x'$ ,

$x'S = \sum_{i=0}^{\infty} x_i s^i = e^{\frac{\lambda s}{q}}$ . 亦即  $\pi' = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \cdots)$ ,

$$\pi_i = e^{-\frac{1}{q}} \cdot \left(\frac{\lambda}{q}\right)^i / i!, \quad (i \geq 0).$$

## §6. 位势理论简介

在这一节中, 如不声明,  $E$ 、 $P = (p_{ij}, i, j \in E)$ 、 $(Q^*, \mathcal{F}^*, P')$  的意义如前, 再设  $V$  ( $V'$ ) 为定义在  $E$  上的全体实值的列(行)向量,  $V_+ = \{h: h \geq 0, h \in V\}$ ,  $V'$  意义类似。

在 §4 中, 为了研究遍历性理论, 我们曾研究过左方程  $\langle x'P = x', x' \geq 0, x' \in (l) \rangle$  及右方程  $\langle Py = y, y \geq 0, y \in (m) \rangle$ . 在这一节中, 我们将把这类问题拓广, 将研究所谓盈(谐)函数及盈(谐)测度问题。

**定义 6.1.** 设  $P = (p_{ij}, i, j \in E)$  是准转移阵,  $h \in V_+$ , 若  $Ph \leq h$ , 则称  $h$  是一个  $P$ -盈函; 特别地, 若  $Ph = h$ , 则称  $h$  是谐函; 更特别地, 称  $P$ -谐函  $h$  是  $P$ -极端谐函, 如果 “ $g \leq h$ ,  $g$  是  $P$ -谐函  $\implies g = \lambda h$ ,  $\lambda$  是实数.” 任取  $a' \in V'_+$ , 若  $a'p \leq a'$ , 则称  $a'$  是  $P$ -

盈测，特别地，若  $\alpha'P = \alpha'$ ，则称  $\alpha'$  是  $P$ -谐测，更特别地，称  $P$ -谐测  $\alpha'$  是  $P$ -极端谐测，如果 “ $\beta' \leq \alpha'$ ， $\beta'$  是  $P$ -谐测  $\Rightarrow \beta' = \lambda\alpha'$ ， $\lambda$  是一个实数。”在不混淆的情况，简记  $P$ -盈函为盈函，其它类似。向量  $h(\alpha')$  对应于  $i$  的分量用  $h(i)$  ( $\alpha'(i)$ ) 表之。

**注** 有的著作中，称盈（谐）函为上调和（调和）函数，称盈（谐）测为过份（不变）测度。

**定义6.2.** 设  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  是概率空间， $(E, \mathcal{E})$  是可测空间， $X$  是由  $\Omega$  到  $E$  的变换（记作  $X: \Omega \rightarrow E$ ），如果  $A \in \mathcal{E} \Rightarrow x^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ ，则称  $X$  是  $(E, \mathcal{E})$  随机变量。任取  $A \in \mathcal{E}$ ，令  $\mu_X(A) = P(X \in A)$ ，则  $\mu_X(\cdot)$  是  $\mathcal{E}$  上的概率测度，称之为  $X$  的分布，记作  $\mu_X = PX^{-1}$ 。若  $E = \mathcal{R}$  是实数空间， $\mathcal{E}$  是  $\mathcal{R}$  中一切波勒尔集，则简称  $(E, \mathcal{E})$  随机变量为随机变量，这时称

$$E(X) = \int_{\Omega} X dP$$

为  $X$  的期望，若  $\mathcal{G}$  是  $\mathcal{F}$  的一个子  $\sigma$  代数，用  $E(X|\mathcal{G})$  表  $X$  关于  $\mathcal{G}$  的条件期望，特别地，若  $X = I_A$  是  $A$  上的示性函数 ( $A \in \mathcal{F}$ )，即  $I_A(\omega) = 1$  当  $\omega \in A$ ，反之  $I_A(\omega) = 0$ ，则称  $P(A|\mathcal{G}) \equiv E(I_A|\mathcal{G})$  为  $A$  关于  $\mathcal{G}$  的条件概率。

**定义6.3.** 设  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  是概率空间， $\mathbf{T}$  是实数空间一个子集， $\{\mathcal{F}_t, t \in \mathbf{T}\}$  是  $\mathcal{F}$  中的一族上升的子  $\sigma$  代数，即  $\mathcal{F}_t$  是  $\sigma$  代数， $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ ，( $t \in \mathbf{T}$ ) 且  $t_1 \leq t_2, t_1, t_2 \in \mathbf{T} \Rightarrow \mathcal{F}_{t_1} \subset \mathcal{F}_{t_2}$ ， $\{X_t, t \in \mathbf{T}\}$  是一族随机变量，若

- (i)  $X_t$  关于  $\mathcal{F}_t$  可测，( $t \in \mathbf{T}$ )，
- (ii)  $E(|X_t|) < \infty$ ，( $t \in \mathbf{T}$ )，
- (iii)  $E(X_s|\mathcal{F}_t) \leq X_t$ ， $[a.e.](P)$  ( $s, t \in \mathbf{T}, s > t$ )，

则称  $\{X_t, \mathcal{F}_t, t \in \mathbf{T}\}$  是一个上鞅，若  $\{\sim X_t, \mathcal{F}_t, t \in \mathbf{T}\}$  是上鞅，则称  $\{X_t, \mathcal{F}_t, t \in \mathbf{T}\}$  是半鞅，既是上鞅又是半鞅者称之为鞅。

**命题6.1.** 设  $P$  是转移阵， $(\Omega^*, \mathcal{F}^*, X_n, \theta_n, P^i)$  是  $P$  链。 $\mathcal{F}_n = \sigma([X_k^j], k \leq n, j \in E)$ ，( $n \geq 0$ )， $h \geq 0, h \in (m)$ 。则  $h$  是盈

(谐) 函的充要条件是:  $\{h(X_n), \mathcal{F}_n, n \geq 0\}$  关于  $(\Omega^*, \mathcal{F}^*, P')$  是上鞅 (鞅),  $(i \in E)$ .

证 设  $h$  是盈函, 任取  $n > k \geq 0$ , 用 (1.1) 及  $h \geq P^{(n)}h$ , ( $v \geq 0$ ) 可得:  $E^i(h(X_n)) = \sum_{j \in E} p_{i,j}^{(n)} h(j) \leq h(i) < \infty$  及

$$\begin{aligned} \int_{\substack{h \\ \substack{0 \leq \omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_n}}} h(X_n) P^i(d\omega) &= \sum_{j \in E} P^i\left(\left[\begin{smallmatrix} 0, 1, \dots, k, n \\ i_0, i_1, \dots, i_k, j \end{smallmatrix}\right]\right) h(j) \\ &= P^i\left(\left[\begin{smallmatrix} 0, 1, \dots, k \\ i_0, i_1, \dots, i_k \end{smallmatrix}\right]\right) \sum_{j \in E} p_{i_k, j}^{(n-k)} h(j) \\ &\leq P^i\left(\left[\begin{smallmatrix} 0, \dots, k \\ i_0, \dots, i_k \end{smallmatrix}\right]\right) h(i_k) = \int_{\substack{h \\ \substack{0 \leq \omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_k}}} h(X_k) P^i(d\omega), \end{aligned}$$

故  $E^i(h(X_n) | \mathcal{F}_k) \leq h(X_k)$ ,  $[a, e]$ ,  $(P')$  ( $E^i$  表示对概率测度  $P^i$  的期望算子)。所以  $\{h(X_n), \mathcal{F}_n, n \geq 0\}$  是  $(\Omega^*, \mathcal{F}^*, P')$  上的上鞅。反之, 若  $\{h(X_n), \mathcal{F}_n, n \geq 0\}$  是  $(\Omega^*, \mathcal{F}^*, P')$  上的上鞅,  $(i \in E)$ , 把  $E^i(h(X_1) | \mathcal{F}_0) \leq h(X_0)$  对  $P^i$  测度取期望得  $Ph \leq h$ , 即  $h$  是盈函。

定义 6.4. 设  $P$  是准转移阵, 称  $G \equiv \sum_{n=0}^{\infty} P^n$  为  $P$  的势核。若  $h \in V_+$ ,

$g \in V_+$ ,  $h = Gg$ , 则称  $h$  是  $g$  的位势, 是  $P$ -势函, 简称势函。类似地, 若  $\beta' \in V'_+$ ,  $\alpha' \in V'_+$ ,  $\beta' = \alpha' G$ , 则称  $\beta'$  是  $\alpha'$  的位势, 是  $P$ -势测, 简称势测。(约定  $\infty \cdot 0 = 0$ )。

定理 6.1. (分解定理) 设  $P$  为准转移阵, 对任一盈函  $f$ , 恒存在唯一一对  $g, h \in V_+$ ,  $h$  是谐函, 且  $f = Gg + h$ 。

证 由  $Pf \leq f$  知  $\{P^n f, n \geq 0\}$  是非升函数 (列向量) 列, 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n f = h \geq 0$  存在。再用控制收敛定理知  $Ph = P(\lim_{n \rightarrow \infty} P^n f) = \lim_{n \rightarrow \infty} P^{n+1} f = h$ , 故  $h$  是谐函。令  $g = f - Pf \geq 0$ , 则

$$Gg = \left( \sum_{n=0}^{\infty} P^n \right) (f - Pf) = \sum_{n=0}^{\infty} P^n (f - Pf) = \lim_{k \rightarrow \infty} (f - P^{k+1}f) \\ = f - h.$$

若 $f$ 还有另一分解 $f = Gg^* + h^*$ ,  $h^*$ 是谐函,  $Gg^*$ 是势函, 则  
 $P^n Gg + h = P^n Gg^* + h^*$ , ( $n \geq 0$ ), 但是由 $0 \leq Gg < \infty$ 得 $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n Gg =$   
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n}^{\infty} P^k g = 0$ , ( $Gg^*$ 也一样), 所以 $h = h^*$ , 从而 $Gg = Gg^*$ . 把  
 $I-P$ 左乘此式两边即得 $g = g^*$ .

系1. 设 $g \in V_+$ ,  $Gg \in V_+$ , 则 $Gg$ 是普哇松方程

$$\langle (I-P)f = g, f \text{ 是盈函} \rangle$$

的最小解。

证 显然 $Gg$ 是解。若 $f$ 是另一解, 则由定理6.1有 $f = G(f - Pf) + \lim_{n \rightarrow \infty} P^n f = Gg + \lim_{n \rightarrow \infty} P^n f$ ,  $h = \lim_{n \rightarrow \infty} P^n f \geq 0$ , 故 $Gg$ 是最小解。

系2. (1)  $f$ 是盈函,  $g, Gg \in V_+$ ,  $f \leq Gg \implies f$ 是势函;

(2)  $f$ 是谐函,  $g, Gg \in V_+$ ,  $f \leq Gg \implies f = 0$ .

证 用定理6.1, 为证系2只须证明(2). 设 $f$ 是谐函且 $f \leq Gg$ , 则 $f = P^n f \leq P^n Gg$ , 而定理6.1中已证 $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n Gg = 0$ , 故 $f = 0$ .

定理6.1'. 设 $P$ 为准转移阵, 任何盈测 $\alpha'$ 均可唯一地分解成 $\alpha' = \beta'G + \gamma'$ , 其中 $\beta'G$ 是势测,  $\gamma'$ 是谐测。

证 任取 $i \in E$ ,  $\{\alpha' P^n e_i, n \geq 1\}$ 是非升序列, 故可令 $\gamma(i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha' P^n e_i$ . 易证 $\gamma' = (\gamma(i), i \in E)$ 是谐测。仿定理6.1可证定理6.1'.

定义6.5. 设 $P$ 是转移阵,  $E = E_1 \cup E_2$ ,  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ . 称 $E_2$ 是 $P$ 的(或者对应的 $P$ 链的)必离集, 如

$$P^i \left( \bigcap_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ E_2 \end{bmatrix} \right) = 0, (i \in E), \quad (6.1)$$

在不会混淆的情况下, 简称 $E_2$ 是必离集。

**命题6.2.** 设  $P$  是转移阵, 令  $E_2 \subset E$ ,  $P_2 = P \text{ on } E_2$ ,  $g_m(i) = P^i \left( \bigcap_{r=1}^m \left[ \begin{smallmatrix} n \\ E_2 \end{smallmatrix} \right] \right)$ ,  $g_m = \left( g_m(i) \right)_{i \in E_2}$ , 则下列陈述等价:

- (1)  $E_2$  是必离集;
- (2)  $\lim_{m \rightarrow \infty} g_m = 0$ ;
- (3)  $\lim_{m \rightarrow \infty} P_2^m \mathbf{1} = 0$ , ( $P_2^m$  表  $P_2$  的  $m$  次幂)
- (4)  $\langle P_2 g = g, 0 \leq g \leq 1 \rangle$  只有 0 解.

**证** (1)  $\iff$  (2) 显然成立.

(2)  $\implies$  (3) 用 (1.1) 有  $P_2^m \mathbf{1} = g_m$ , 故 (2)  $\implies$  (3).

(3)  $\implies$  (4) 只须注意  $\langle P_2 g = g, 0 \leq g \leq 1 \rangle$  的任一解均满足  $g = \lim_{m \rightarrow \infty} P_2^m g \leq \limsup_{m \rightarrow \infty} P_2^m \mathbf{1}$ .

(4)  $\implies$  (2) 由于  $P_2 g_m = g_{m+1}$ ,  $0 \leq g_m \leq 1$ ,  $g = \lim_{m \rightarrow \infty} g_m$  是  $\langle P_2 g = g, 0 \leq g \leq 1 \rangle$  之解, 故 (4)  $\implies$  (2).

**命题6.3.** 设  $P$  是转移阵, 则下列陈述等价:

- (1)  $\mathbf{1}$  是极端谐函;
- (2)  $\langle Ph = h, 0 \leq h \leq 1 \rangle$  只有常数解.

**证** 由定义立得.

设  $H \subset E$ , 令

$${}_H P_{i,j}^{(n)} = P^i \left( \bigcap_{r=1}^{n-1} \left[ \begin{smallmatrix} \gamma \\ H \end{smallmatrix} \right] \left[ \begin{smallmatrix} n \\ j \end{smallmatrix} \right] \right), \quad \begin{matrix} (n \geq 1) \\ (i, j \in E) \end{matrix}, \quad (6.2)$$

$${}_H P_{i,j}^* = \sum_{n=1}^{\infty} {}_H P_{i,j}^{(n)} \quad (6.3)$$

**定理6.2.** 设  $P$  是转移阵,  $E = E_1 \cup E_2$ ,  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ ,  $E_2$  是必离集, 若

$$\langle f(i) = \sum_{j \in E_1} {}_E P_{i,j}^* f(j), 0 \leq f(i) \leq 1, i \in E_1 \rangle \quad (6.4)$$

只有常数解, 则

$$\langle Ph = h, 0 \leq h \leq 1 \rangle \quad (6.5)$$

亦然。

证 注意：由于  $E_2$  是必离集，故任取  $i \in E_1$ ，

$$\sum_{j \in E_1} p_{i,j}^* = P^i \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[ \begin{smallmatrix} n \\ E_1 \end{smallmatrix} \right] \right) = 1 - P^i \left( \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[ \begin{smallmatrix} n \\ E_2 \end{smallmatrix} \right] \right) = 1,$$

即  $(p_{i,j}^*, i, j \in E_1)$  是转移阵，故  $c1$  ( $0 \leq c \leq 1$ ) 是 (6.4) 和 (6.5) 的解，设  $h$  是 (6.5) 的解，往证： $h = c1$ 。令

$$P = \begin{matrix} & E_1 & E_2 \\ \begin{matrix} E_1 \\ E_2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} P_{1,1} & P_{1,2} \\ P_{2,1} & P_{2,2} \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad h = \begin{matrix} E_1 \\ E_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix},$$

即是  $P_{s,t} = (p_{i,j}, i \in E_s, j \in E_t), (s, t = 1, 2), f = \text{hon} E_1, g = \text{hon} E_2$ ，则可证：

$$(1) \quad g = H_2 P_{2,1} f, \text{ 其中 } H_2 = \sum_{n=0}^{\infty} P_{2,2}^n;$$

(2)  $f$  是 (6.4) 的解。

事实上，由

$$\begin{pmatrix} P_{1,1} & P_{1,2} \\ P_{2,1} & P_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \leq 1$$

得知  $g$  是  $P_{2,2}$ —盈函，故由定理 6.1 得：

$$g = g_1 + g_2, \quad g_1 = P_{2,2} g_1, \quad 0 \leq g_1 \leq 1, \quad g_2 = H_2 v.$$

由于  $E_2$  是必离集，所以由命题 6.2 有

$$g_1 = \lim_{m \rightarrow \infty} P_{2,2}^m g_1 = 0.$$

因此， $g = H_2 v$ 。以此代入  $P_{2,1} f + P_{2,2} g = g$  得

$$H_2 v = P_{2,1} f + P_{2,2} H_2 v = P_{2,1} f + (H_2 - I)v.$$

所以  $v = P_{2,1} f$ ，即是  $g = H_2 P_{2,1} f$ 。(1) 证毕。

再证 (2)。令  $\mathcal{F}_n = \sigma \left\{ \left[ \begin{smallmatrix} k \\ j \end{smallmatrix} \right], k \leq n, j \in E \right\}, (n \geq 0)$ ，由命题

6.1知:  $\{h(X_n), \mathcal{F}_n, n \geq 0\}$  是  $(\Omega^*, \mathcal{F}^*, P^i)$  上的鞅, ( $i \in E$ ,  $X_n$  是  $\Omega^*$  上的坐标函数). 令  $\tau(\omega) = \inf\{n; X_n(\omega) \in E_1, n \geq 1\}$ , (空集的inf定义为  $+\infty$ ), 则由  $E_2$  是必离集可知

$$P^i(\tau < \infty) = 1, \quad (i \in E), \quad (6.6)$$

显然,

$$\begin{aligned} P^i(X_0 = i) &= P^i(X_\tau \in E_1) = P^i(f(X_0) = h(X_0)) \\ &= P^i(f(X_\tau) = h(X_\tau)) = 1, \quad (i \in E_1), \end{aligned} \quad (6.7)$$

$$\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n, \quad (n \geq 0), \quad (6.8)$$

再利用  $\{h(X_n), \mathcal{F}_n, n \geq 0\}$  是鞅可知, 对  $i \in E_1$  有

$$\begin{aligned} f(i) &= E^i(h(X_0)) = \int_{\{\tau=0\}} h(X_\tau) P^i(d\omega) + \int_{\{\tau>0\}} h(X_0) P^i(d\omega) \\ &= \int_{\{\tau=0\}} h(X_\tau) P^i(d\omega) + \int_{\{\tau>0\}} h(X_1) P^i(d\omega) \\ &= \int_{\{0 \leq \tau \leq 1\}} h(X_\tau) P^i(d\omega) + \int_{\{\tau>1\}} h(X_1) P^i(d\omega) \\ &= \dots = \int_{\{0 \leq \tau \leq k\}} h(X_\tau) P^i(d\omega) + \int_{\{\tau>k\}} h(X_k) P^i(d\omega). \end{aligned} \quad (6.9)$$

由  $0 \leq k \leq 1$  及 (6.6) 对 (6.9) 取极限 ( $k \rightarrow \infty$ ) 得:

$$\begin{aligned} f(i) &= E^i(h(X_\tau)) = \sum_{j \in E_1} h(j) P^i(X_\tau = j) \\ &= \sum_{j \in E_1} h(j) \sum_{n=1}^{\infty} P^i\left(\bigcap_{v=1}^{n-1} \{X_v \in \bar{E}_1\} \{X_n = j\}\right) \\ &= \sum_{j \in E_1} f(j)_{E_1} P_{i, j}^*. \end{aligned} \quad (6.10)$$

此即  $f$  是 (6.4) 的解。(2) 得证。由定理假设得:  $f = c1$ , ( $0 \leq c \leq 1$ ), 所以

$$h = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c1 \\ H_2 P_{2,1} c1 \end{pmatrix}.$$

为证定理, 只须证  $H_2 P_{2,1} 1 = 1$ . 事实上, 由  $P$  是转移阵知:



$$\begin{pmatrix} P_{1,1} & P_{1,2} \\ P_{2,1} & P_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_1 \\ \mathbf{1}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_1 \\ \mathbf{1}_2 \end{pmatrix},$$
 $(\mathbf{1}_i \text{ 是定义在 } E_i \text{ 上分量皆为1的列向量}),$  更有

$$\begin{aligned}
 \mathbf{1}_2 &= P_{2,1} \mathbf{1}_1 + P_{2,2} \mathbf{1}_2 = P_{2,1} \mathbf{1}_1 + P_{2,2} P_{2,1} \mathbf{1}_1 + P_{2,2}^2 \mathbf{1}_2 \\
 &= \cdots = \left( \sum_{n=0}^{k-1} P_{2,2}^n \right) P_{2,1} \mathbf{1}_1 + P_{2,2}^k \mathbf{1}_2. \quad (6.11)
 \end{aligned}$$

由  $E_2$  是必离集, 用命题 6.2 得:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_{2,2}^k \mathbf{1}_2 = 0.$$

因此, 在 (6.11) 中对  $k \rightarrow \infty$  取极限得:

$$H_2 P_{2,1} \mathbf{1}_1 = \mathbf{1}_2.$$

定理证毕。

**定理 6.3.** 转移阵  $P$  的状态空间  $E$  由一个常返类所构成的充要条件是: 全体盈函为  $c\mathbf{1}$  ( $0 \leq c$ ), 自然, 这时全体谐函也是这些。这是定理 4.13 的复述。

**定理 6.4.** 表转移阵  $P$  的状态空间  $E = N \cup R = N \cup (\cup R_n)$ , ( $N$  是全体滑过状态,  $R$  是全体常返状态,  $\{R_n\}$  是全体不交的常返类), 从而由定理 3.2 有,

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} N & R_1 & R_2 & \cdots \end{matrix} \\ \begin{matrix} N \\ R_1 \\ R_2 \\ \vdots \end{matrix} & \begin{pmatrix} P_{0,0} & P_{0,1} & P_{0,2} & \cdots \\ 0 & P_1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & P_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (6.17)$$

这时全部盈函为一切下述形式的  $h$ :

$$\begin{cases} h = \begin{matrix} N \\ R_1 \\ R_2 \\ \vdots \end{matrix} \begin{pmatrix} f \\ b_1 \mathbf{1} \\ b_2 \mathbf{1} \\ \vdots \end{pmatrix}, & (f \geq 0, b_n \text{ 是非负实数}), \end{cases} \quad (6.18)$$

$$P_{0,0} f + \sum_n b_n P_{0,n} \mathbf{1} \leq f, \quad (6.19)$$

把 (6.19) 中的不等号换成等号, 即得全体谐函。

证 显然任给一个满足 (6.18)、(6.19) 的  $h$ , 都是盈函, 今任取一个盈函

$$h = \begin{pmatrix} f \\ R_1 h_1 \\ R_2 h_2 \\ \vdots \end{pmatrix},$$

必有

$$\begin{pmatrix} P_{0,0}f + \sum_n P_{0,n}h_n \\ P_1 h_1 \\ P_2 h_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = Ph \leq h = \begin{pmatrix} f \\ h_1 \\ h_2 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad (6.20)$$

更有

$$\begin{cases} P_{0,0}f + \sum_n P_{0,n}h_n \leq f, & (f \geq 0, h_n \geq 0), & (6.21) \\ P_n h_n \leq h_n, & (h_n \geq 0), & (6.22) \end{cases}$$

由 (6.22) 知  $h_n$  是  $P_n$ —盈函, 而  $P_n$  的状态空间由一个常返类所构成, 因此由定理 6.3 知  $h_n = b_n 1$  ( $b_n$  是非负实数)。

定理 6.5. 设  $P$  是转移阵,  $E = E_1 \cup E_2$ ,  $E_1 \cap E_2 = \phi$ ,  $E_2$  是必离集,  $E_1$  是某个常返类中的一部份, 且存在正整数  $d$ , 使  $P^d(\tau=d) = 1$  ( $i \in E_1$ ), ( $\{X_n\}$ 、 $\tau$  的定义见定理 6.2) 则  $\langle Ph = h, 0 \leq h \leq 1 \rangle$  以且仅以  $c1$  为其解。

注: 若  $E_1$  是一个常返类或是某个周期为  $d$  的常返类中的一个循环子类, 则本定理中关于  $\tau$  之条件成立。

证 令  $\tilde{P} = P^d \sigma_{n \in E_1}$ , 由  $\sum_{i \in E_1} p_{i,j}^{(d)} = \sum_{i \in E_1} p^i(X_d=j) = p^i(X_i \in E_1) = 1$  ( $i \in E_1$ ) 知  $\tilde{P}$  是转移阵。由  $E_1$  是某个常返类中一部分及  $P^d(\tau=d) = 1$  ( $i \in E_1$ ) 知: 当  $i, j \in E_1$  有  $\sum_{n=1}^{\infty} p_{i,j}^{(n)} = \infty, p_{i,j}^{(n)} = 0$  ( $n \neq$

$0(\text{mod } d)$ ), 所以  $\sum_{k=1}^{\infty} p_{i,j}^{(k,d)} = \infty, (i, j \in E_1), \tilde{P}^k = (p_{i,j}^{(k,d)}), i, j \in E_1$ ,

此即  $\tilde{P}$  的状态空间  $E_1$  由一个常返类构成。用定理 6.3 知  $\langle \tilde{P}f = f, 0 \leq f \leq 1 \rangle$  的全体解是  $c1, (0 \leq c \leq 1)$ 。但  $p_{i,j}^{(d)} = p^i(X_d = j) = \sum_{k=1}^{\infty} p_{i,j}^{(k,d)}, (i, j \in E_1)$ , 所以  $\langle \tilde{P}f = f, 0 \leq f \leq 1 \rangle$  即是 (6.4)。用定理 6.2 即得定理 6.5。

**定理 6.6.** 设转移阵  $P$  有常返状态, 则  $\langle Ph = h, 0 \leq h \leq 1 \rangle$  以且仅以  $c1 (0 \leq c \leq 1)$  为其解的充要条件是  $E = N \cup R_1$ , 其中  $N$  是全体滑过状态 (可以是空集),  $N$  构成必离集,  $R_1$  由一个常返类构成。

**证** 充分性. 若  $N = \emptyset$ , 则由定理 6.3 知  $\langle Ph = h, 0 \leq h \leq 1 \rangle$  以且仅以  $c1$  为其解,  $(0 \leq c \leq 1)$ 。若  $N \neq \emptyset$ ,  $N$  是必离集,  $R_1$  由一个常返类构成, 则用定理 6.5 亦得同样结论。

必要性. 设  $\langle Ph = h, 0 \leq h \leq 1 \rangle$  以且仅以  $c1$  为其解  $(0 \leq c \leq 1)$ 。由定理 6.4 知  $E_1$  恰含一个常返类  $R_1$  (因定理假设没有常返状态)。谬设  $N$  非必离集, 则由命题 6.2 得  $\langle P_{0,0}f = f, 0 \leq f \leq 1 \rangle$  有非 0 解  $f^*$  ( $P_{0,0}$  的定义见 (6.17)), 从而用定理 6.4 知  $\langle Ph = h, 0 \leq h \leq 1 \rangle$  有非常函数解

$$h = \sum_{R_1}^N \begin{pmatrix} f^* \\ 0 \end{pmatrix}.$$

矛盾, 故  $N$  是必离集。

## § 7. 转移阵的可逆性

**定义 7.1.** 设  $E$  为一可数集,  $P = (p_{i,j}, i, j \in E)$  是  $E$  上的一个准转移阵。如果存在一个  $E$  上的行向是  $\mu' = (\mu_i, i \in E)$ , 满足  $\mu' \geq 0$ ,  $\mu' \neq 0$ ,  $\mu'1 < \infty$ ,

$$\mu_i p_{i,j} = \mu_j p_{j,i}, (i, j \in E), \quad (7.1)$$

则说  $P$  是可逆的, (若  $P$  为可逆的转移阵, 亦说  $P$  链或以  $P$  为转移阵的马尔可夫链是可逆的)。这时  $\mu'$  称为  $P$  的一个伴随行向量,  $P$  称

为关于 $\mu'$ 是可逆的。

**定理7.1.** 设 $P$ 是 $E$ 上的一个转移阵,  $\mu' = (\mu_i, i \in E)$ 是 $E$ 上的一个行向量,  $\mu' \geq 0$ ,  $\mu' \neq 0$ ,  $\mu' \mathbf{1} < \infty$ , 则下列陈述等价:

(1)  $P$ 关于 $\mu'$ 是可逆的;

(2)  $P^n$ 关于 $\mu'$ 是可逆的(对一切 $n \geq 0$ );

(3) 对 $E$ 上的列向量  $f = \left( f_i \right)_{i \in E}$ ,  $g = \left( g_i \right)_{i \in E}$ , 只要  $f \geq 0, g \geq 0$  (或者  $\sup_{i \in E} |f_i| < \infty$ ,  $\sup_{i \in E} |g_i| < \infty$ ), 就有

$$\sum_{i \in E} \mu_i f_i \sum_{j \in E} p_{i,j} g_j = \sum_{i \in E} \mu_i g_i \sum_{j \in E} p_{i,j} f_j, \quad (7.2)$$

(4) 对满足(3)中条件的 $f, g$ , 及满足 $m+n=s+t$ 的非负整数 $m, n, s, t$ , 有

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in E} \mu_i \left( \sum_{j \in E} p_{i,j}^{(n)} f_j \right) \left( \sum_{k \in E} p_{i,k}^{(m)} g_k \right) \\ &= \sum_{i \in E} \mu_i \left( \sum_{j \in E} p_{i,j}^{(s)} f_j \right) \left( \sum_{k \in E} p_{i,k}^{(t)} g_k \right). \end{aligned} \quad (7.3)$$

**证** (1) $\Rightarrow$ (2) 由于 $I$ 和 $P$ 关于 $\mu'$ 是可逆的。对 $n$ 作归纳法。设 $P^n$ 关于 $\mu'$ 是可逆, ( $m \leq n$ )则

$$\begin{aligned} \mu_i p_{i,j}^{(n+1)} &= \mu_i \sum_{k \in E} p_{i,k} p_{k,j}^{(n)} \\ &= \sum_{k \in E} \mu_k p_{k,i} p_{k,j}^{(n)} \\ &= \sum_{k \in E} p_{k,i} \mu_k p_{k,j}^{(n)} = \mu_j p_{j,i}^{(n+1)}. \end{aligned}$$

归纳法完成。故(1) $\Rightarrow$ (2)。

(2) $\Rightarrow$ (3)。设(2)成立, 则

$$\begin{aligned} \sum_{i \in E} \mu_i f_i \sum_{j \in E} p_{i,j} g_j &= \sum_{j \in E} g_j \sum_{i \in E} f_i \mu_i p_{i,j} \\ &= \sum_{j \in E} \mu_j g_j \sum_{i \in E} p_{j,i} f_i = \sum_{i \in E} \mu_i g_i \sum_{j \in E} p_{i,j} f_j. \end{aligned}$$

(3) $\Rightarrow$ (4)。由于(3) $\Rightarrow$ (1)乃属显然, 再用(1) $\Rightarrow$ (2), 若(3)

成立, 则  $P^n (n \geq 0)$  关于  $\mu'$  是可逆的。再对  $P^n$  用 (1)  $\Rightarrow$  (3) 有:

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in E} \mu_i \left( \sum_{j \in E} p_{i,j}^{(n)} f_j \right) \left( \sum_{k \in E} p_{i,j}^{(n)} g_k \right) \\ &= \sum_{i \in E} \mu_i g_i \sum_{j \in E} p_{i,j}^{(n)} \left( \sum_{k \in E} p_{j,k}^{(n)} f_k \right) \\ &= \sum_{i \in E} \mu_i g_i \sum_{k \in E} p_{i,k}^{(n+n)} f_k. \end{aligned}$$

此即 (4) 成立。

(4)  $\Rightarrow$  (1)。显然。

**定理 7.2.** 若准转移阵  $P$  关于  $\mu'$  是可逆的, 则  $\mu'$  是  $(l)$  中的非 0 的  $P$ -盈测, 特别地, 若  $P$  是转移阵, 则  $\mu'$  是  $(l)$  中的非 0 的  $P$ -谐测。

**证** 令  $\mu' = (\mu_i, i \in E)$ , 则

$$\mu_i \geq \mu_i \sum_{j \in E} p_{i,j} = \sum_{j \in E} \mu_j p_{j,i}, \quad (i \in E).$$

此即  $\mu'$  是  $P$ -盈测。特别地, 若  $P$  是转移阵, 则上式中之“ $\geq$ ”应为“ $=$ ”, 此即  $\mu'$  是  $P$ -谐测。

**定理 7.3.** 若准转移阵  $P$  关于  $\mu'$  是可逆的, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n = \tilde{P}$ , 则

(1)  $\tilde{P}$  关于  $\mu'$  是可逆的;

(2) 对一切非负整数  $m, n$  及一切有界列向量  $f$  和  $g$ , 有

$$\sum_{i \in E} \mu_i \left( \sum_{j \in E} \tilde{p}_{i,j} f_j \right) \left( \sum_{j \in E} p_{i,j}^{(m)} g_j - \sum_{j \in E} p_{i,j}^{(n)} g_j \right) = 0, \quad (7.4)$$

其中  $P^n = (p_{i,j}^{(n)}, i, j \in E)$ ,  $\tilde{P} = (\tilde{p}_{i,j}, i, j \in E)$ 。

**证** (1) 由定义立即可得。

(2) 由定理 7.1(4) 得:

$$\sum_{i \in E} \mu_i \left( \sum_{j \in E} p_{i,j}^{(1+n)} f_j \right) \left( \sum_{j \in E} p_{i,j}^{(m)} g_j \right)$$

$$= \sum_{i \in E} \mu_i \left( \sum_{j \in E} p_{i,j}^{(1-n)} f_j \right) \left( \sum_{j \in E} p_{i,j}^{(n)} g_j \right).$$

令  $t \rightarrow \infty$ , 并用控制收敛定理即得(2)。

**定理 7.4.** 设  $P_1, \dots, P_m$  皆为  $E$  上之准转移阵, 且皆关于  $\mu'$  是可逆的, 若

$$P_1 P_2 \cdots P_m = P_m P_{m-1} \cdots P_1,$$

则  $P_1 P_2 \cdots P_m$  关于  $\mu'$  是可逆的。

**证** 令  $P_t = (p_{i,j}^{[t]}), i, j \in E$ ,

反复利用可逆性的定义可得:

$$\begin{aligned} & \mu_i \sum_{j_1 \in E} \cdot \sum_{j_2 \in E} \cdots \sum_{j_{m-1} \in E} p_{i,j_1}^{[1]} p_{j_1,j_2}^{[2]} \cdots p_{j_{m-1},i}^{[m]} \\ &= \sum_{j_1 \in E} \sum_{j_2 \in E} \cdots \sum_{j_{m-1} \in E} \mu_{j_1} p_{j_1,j_2}^{[1]} p_{j_2,j_3}^{[2]} \cdots p_{j_{m-1},i}^{[m]} \\ &= \cdots = \sum_{j_1 \in E} \sum_{j_2 \in E} \cdots \sum_{j_{m-1} \in E} p_{j_1,j_2}^{[1]} p_{j_2,j_3}^{[2]} \\ & \quad \cdots p_{j_{m-2},j_{m-1}}^{[m-1]} \cdot p_{j_{m-1},i}^{[m]} \mu_{j_1} \\ &= \sum_{j_{m-1} \in E} \sum_{j_{m-2} \in E} \cdots \sum_{j_1 \in E} p_{j_1,j_2}^{[1]} p_{j_2,j_3}^{[2]} \cdots p_{j_{m-2},j_{m-1}}^{[m-1]} p_{j_{m-1},i}^{[m]} \mu_{j_1} \\ &= \sum_{j_1 \in E} \sum_{j_2 \in E} \cdots \sum_{j_{m-1} \in E} p_{j_1,j_2}^{[1]} p_{j_2,j_3}^{[2]} \cdots p_{j_{m-1},i}^{[m]} \mu_{j_1}. \end{aligned}$$

此即  $P_1 P_2 \cdots P_m$  关于  $\mu'$  是可逆的。

**定理 7.5.** 设  $P = (p_{i,j}), i, j \in E$  是一个转移阵。

(1) 若  $E$  没有正状态, 则每一个  $P$ -谐测  $\mu'$  皆恒等于 0, 且  $P$  是不可逆的;

(2) 若  $E$  恰有一个正类  $R_1^+$ , ( $N \cup R^0$  可以非空), 则  $P$  是可逆的充要条件是

$$\pi'(1) e_i p_{i,j} = \pi'(1) e_j p_{j,i}, \quad (i, j \in R_1^+),$$

其中  $\pi'(1)$  如定理 4.5 中所定义,  $e_i$  是  $E$  上之列向量, 对应于  $i$  的元素为 1 其它元素为 0。

(3) 若  $E = R_1^+$ , 则  $P$  是可逆的充要条件是

$$\Pi e_i p_{i,j} = \Pi e_j p_{j,i}, \quad (i, j \in E),$$

其中  $\Pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n P^\nu$ .

(4) 一般地,  $P$  是可逆的充要条件是: 存在正实数  $s_1, \sum_n s_n$

$< \infty$ , 使

$$x'(s_1, \dots, s_n \dots) e_i p_{i,j} = x'(s_1, \dots, s_n \dots) e_j p_{j,i}, \quad (i, j \in E), \quad (7.5)$$

其中

$$N \quad R^0 \quad R_1^+ \quad R_2^+$$

$x'(s_1, \dots, s_n \dots) = (0, 0, s_1 \pi'(1), s_2 \pi'(2), \dots)$  是  $E$  上的非 0 行向量。

证 (1) 由 (4.11) 立即可得。

(2) 由定理 7.2,  $P$  的每一个伴随测度  $\mu'$  都是 (I) 中的非 0 的  $P$ —谐测 (不变测度)。因为  $E$  恰有一个正类  $R_1^+$ , 由 (4.11),

$$\langle \mu' p = \mu', \mu' \in (I), \mu' \geq 0 \rangle$$

的通解即 (I) 中的全部  $P$ —谐测为:

$$N \quad R^0 \quad R_1^+$$

$$\mu' = (0, 0, s_1 \pi'(1)), \quad \infty > s_1 \geq 0. \quad (7.6)$$

若  $P$  是可逆的, 则有伴随测度  $\mu'$ ,  $\mu'$  必如 (7.6) 形式, 且  $s_1 > 0$ ,

$$(0, 0, s_1 \pi'(1)) e_i p_{i,j} = (0, 0, s_1 \pi'(1)) e_j p_{j,i}, \quad (i, j \in E),$$

特别地, 取  $i, j \in R_1^+$  有

$$\pi'(1) e_i p_{i,j} = \pi'(1) e_j p_{j,i} \quad i, j \in R_1^+.$$

反之, 若上式成立, 取

$$N \quad R^0 \quad R_1^+$$

$$\mu' = (0, 0, \pi'(1)),$$

则

$$\mu' e_i p_{i,j} = \mu' e_j p_{j,i}, \quad i, j \in R_1^+$$

而 $i, j$ 中至少有一个不属于 $R_1^+$ 时,不妨令 $i \in N \cup R^0$ , 则

$$\mu' e_i p_{i,j} = 0 \cdot p_{i,j} = 0,$$

若 $j \in N \cup R^0$ , 则有 $\mu' e_j = 0$ ,

若 $j \in R_1^+$ , 则有 $p_{j,i} = 0$ , 总之 $\mu' e_j p_{j,i} = 0$ . 这就证明 $i, j$ 中至少有一个不属于 $R_1^+$ 时亦有  $\mu' e_i p_{i,j} = \mu' e_j p_{j,i}$ .

所以

$$\mu' e_i p_{i,j} = \mu' e_j p_{j,i}, \quad (i, j \in E).$$

此即 $P$ 关于 $\mu'$ 是可逆的。

(3) 由(2)及定理4.5立即可得 (3)。

(4) 若 $P$ 是可逆的, 由(1)知 $E$ 中必有正状态, 又因为全体(1)中的非0的 $P$ -诸测必为,

$$N \quad R^0 \quad R_1^+ \quad R_2^+$$

$$x'(s_1, s_2, \dots, s_n, \dots) = (0, 0, s_1 \pi'(1), s_2 \pi'(2), \dots),$$

$s_n \geq 0, 0 < \sum_n s_n < \infty$ , 每一个伴随测度又必为(1)中的非0的 $P$ -诸

测, 所以, 由 $P$ 的可逆性得知: 必存在一个 $x'(s_1, s_2, \dots, s_n, \dots)$

$$N \quad R^0 \quad R_1^+ \quad R_2^+$$

$$= (0, 0, s_1 \pi'(1), s_2 \pi'(2), \dots), \text{ 使}$$

$$x'(s_1, s_2, \dots, s_n, \dots) e_i p_{i,j} = x'(s_1, s_2, \dots, s_n, \dots) e_j p_{j,i},$$

对一切 $i, j \in E$ 成立, 此即(7.5)成立. 反之, 若(7.5)成立, 取 $\mu' = x'(s_1, s_2, \dots, s_n, \dots)$ 即为 $P$ 的一个伴随测度, 故 $P$ 是可逆的.

下面我们看几个例子.

**例7.1.** 考虑例5.1中的自由随机徘徊. 即是 $E = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ ,  $P = (p_{i,j}, i, j \in E)$ ,  $p_{i,i-1} = g_i, p_{i,i+1} = p_i, p_i > 0, g_i > 0, p_i + g_i = 1, (i \in E), p_{i,j} = 0$  (当 $|j-i| \neq 1$ ). 令

$$\delta = \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{p_0 p_1 \cdots p_{i-1}}{g_1 g_2 \cdots g_i} + \frac{g_0 g_{-1} \cdots g_{-i+1}}{p_{-1} p_{-2} \cdots p_{-i}} \right),$$

$$\theta_1 = \left( 1 + \frac{g_1}{p_1} + \cdots + \frac{g_1 \cdots g_i}{p_1 \cdots p_i} \right),$$



$$\theta_2 = \left(1 + \frac{p_{-1}}{g_{-1}} + \cdots + \frac{p_{-1} \cdots p_{-i}}{g_{-1} \cdots g_{-i}}\right),$$

在例5.1中已证:

$$(1) \delta = \infty \implies \Pi = 0;$$

$$(2) \delta < \infty \iff E = R_1^+;$$

$$(3) \delta < \infty \implies \Pi = \frac{1}{\pi'_1} \mathbf{1} \pi',$$

其中  $\pi' = (\pi_i, i \in E)$  是一行向量,  $\pi_0 = 1, \pi_i = p_0 p_1 \cdots p_{i-1} / g_1 g_2 \cdots g_i, (i > 0), \pi_{-i} = g_0 g_{-1} \cdots g_{-i+1} / p_{-1} p_{-2} \cdots p_{-i}, (i > 0);$

$$(4) \delta = \theta_1 = \theta_2 = \infty \iff E = R_1^0;$$

(5)  $\theta_1, \theta_2$  中至少有一个有限  $\iff E = N$ 。应用定理7.5, 我们有,

$$(6) \delta = \infty \iff \Pi = 0 \implies P \text{ 是不可逆的};$$

$$(7) \delta < \infty, P \text{ 是可逆的充要条件是}$$

$$\pi_i p_{i,j} = \pi_j p_{j,i}, \quad i, j \in E = R_1^+. \quad (7.7)$$

但是, 当  $|j-i| \neq 1$  时  $p_{i,j} = p_{j,i} = 0$ , 所以(7.7)对  $|j-i| \neq 1$  总成立。但当  $|j-i| = 1$  时, 经过简单计算发现(7.7)亦成立。所以, 当  $\delta < \infty$  时,  $P$  是可逆的。

**例7.2.** 考虑例5.2中的在0处有反射屏的随机徘徊。即是  $E = \{0, 1, 2, \cdots\}$ ,  $P = (p_{i,j}, i, j \in E)$ ,  $p_{0,0} = a_0, p_{0,1} = b_0, p_{0,j} = 0, (j > 1), p_{1,0} = a_1, p_{1,1} = b_1, p_{1,j} = 0, (|i-j| \neq 1), a_i > 0, (i \geq 1), b_i > 0, a_i + b_i = 1, (i \in E)$ 。令

$$\delta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n b_{n-1} \cdots b_0}{a_{n+1} a_n \cdots a_1}, \quad \theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{b_1 b_2 \cdots b_n},$$

经过计算可得,

$$(1) \delta < \infty \iff E = R_1^+ \iff P \text{ 是可逆的};$$

$$(2) \delta = \infty, \theta = \infty \iff E = R_1^0 \implies P \text{ 是不可逆的};$$

$$(3) \theta < \infty \iff E = N \implies P \text{ 是不可逆的}。$$

**例7.3.** 考虑例5.3中在0处具有吸收屏的随机徘徊, 即是  $E$

$= \{0, 1, 2, \dots\}$ ,  $P = (p_{i,j}, i, j \in E)$ ,  $p_{0,0} = 1, p_{0,j} = 0, (j \geq 1)$ ,  
 $p_{i,i-1} = g_i, p_{i,i+1} = p_i, p_{i,j} = 0 \ (|i-j| \neq 1 \text{ 且 } i \geq 1), p_i + g_i = 1,$   
 $p_i > 0, g_i > 0, (i \geq 1)$ . 令

$$\beta = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_1 \cdots g_n}{p_1 \cdots p_n},$$

例5.3中已证:

$$(1) \ E = N \cup R_1^+, \ N = \{1, 2, \dots\}, \ R_1^+ = \{0\},$$

$$(2) \ \beta = \infty \implies \Pi = \begin{pmatrix} R_1^+ & N \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(3) \ \beta < \infty \implies \Pi = \begin{pmatrix} R_1^+ & N \\ \tilde{g} & 0 \end{pmatrix}, \text{ 其中}$$

$$\tilde{g} = \begin{pmatrix} \tilde{g}_0 \\ \tilde{g}_1 \\ \tilde{g}_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \frac{1}{\beta} \\ 1 - \frac{1}{\beta} \left(1 + \frac{g_1}{p_1}\right) \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

应用定理7.5, 可证 $P$ 是可逆的充要条件是:

$$\pi'(1)e_i p_{i,j} = \pi'(1)e_j p_{j,i}, \ i, j \in R_1^+.$$

而今 $R_1^+ = \{0\}$ ,  $\pi'(1) = 1, p_{0,0} = 1$ . 所以 $P$ 是可逆的.

**例7.4.** 考虑例5.4中的更新过程. 即是 $E = \{0, 1, 2, \dots\}$ ,  
 $P = (p_{i,j}, i, j \in E)$ ,  $p_{i,0} = g_i, p_{i,i+1} = p_i, p_{i,j} = 0 \ (j \neq 0 \text{ 或 } j \neq i+1),$   
 $p_i > 0, g_i > 0, p_i + g_i = 1, (i \in E)$ . 令

$$\delta = \sum_{n=0}^{\infty} p_0 p_1 \cdots p_n, \quad \theta = \prod_{n=0}^{\infty} p_n,$$

例5.4中已经证明:

$$(1) \ \delta < \infty \iff E = R_1^+ \iff \Pi = \cdots \frac{1}{\pi' \mathbf{1}} \mathbf{1} \pi',$$

其中 $\pi' = (\pi_0, \pi_1, \dots)$ ,  $\pi_0 = 1, \pi_n = p_0 p_1 \cdots p_{n-1}, (n \geq 1)$ ;

$$(2) \delta = \infty, \theta = 0 \iff E = R_1^0 \implies \Pi = 0;$$

$$(3) \delta = \infty, \theta > 0 \iff E = N \implies \Pi = 0.$$

当  $\delta < \infty$  时,  $P$  是可逆的充要条件是

$$\pi_i p_{i,j} = \pi_j p_{j,i}, \quad (i, j \in E),$$

但是

$$\pi_0 p_{0,1} = p_0 \neq p_0 g_1 = \pi_1 p_{1,0},$$

所以此时  $P$  是不可逆的。而当  $\delta = \infty$  时,  $E$  无正状态, 这时  $P$  亦为不可逆的。总之,  $P$  恒为不可逆。

例 7.5. 考虑例 5.7 的交换过程。即是  $E = \{0, 1, 2, \dots\}$ ,  $P = (p_{i,j}, i, j \in E)$ ,

$$p_{i,j} = \sum_{m=0}^{m=i \wedge \pi(i,j)} C_m^i p^m q^{i-m} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{j-m}}{(j-m)!},$$

$\lambda > 0, p > 0, q > 0, p + q = 1$ ,  $C_m^i$  是  $i$  个元素中取  $m$  个的组合数。

例 5.7 中已经证明:

$$(1) E = R_1^+, \Pi = \mathbf{1}\pi', \pi' = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots),$$

$$\pi_i = e^{-\frac{\lambda}{q}} \cdot \frac{\left(\frac{\lambda}{q}\right)^i}{i!} \quad (i \geq 0).$$

因此,  $P$  是可逆的充要条件是

$$\pi_i p_{i,j} = \pi_j p_{j,i}, \quad (i, j \geq 0).$$

但是

$$\begin{aligned} \pi_i p_{i,j} &= e^{-\frac{\lambda}{q}} \cdot \frac{\left(\frac{\lambda}{q}\right)^i}{i!} \cdot \sum_{m=0}^{m=i \wedge \pi(i,j)} C_m^i p^m q^{i-m} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{j-m}}{(j-m)!} \\ &= e^{-\lambda \left(1 + \frac{1}{q}\right)} \sum_{m=0}^{m=i \wedge \pi(i,j)} \lambda^{i+j-m} C_m^i \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^m}{(j-m)! i!} \\ &= e^{-\lambda \left(1 + \frac{1}{q}\right)} \sum_{m=0}^{m=i \wedge \pi(i,j)} \lambda^{i+j-m} \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^m}{m! (i-m)! (j-m)!} \end{aligned}$$

关于  $j$ ,  $i$  是对称的, 所以

$$\pi_i p_{i,j} = \pi_j p_{j,i} (i, j \in E).$$

因此  $P$  是可逆的。

例 7.6. 考虑例 5.5 中的排队过程(一), 即是  $E = \{0, 1, 2, \dots\}$ ,  $P = (p_{i,j}, i, j \in E)$ ,

$$P = \begin{pmatrix} k_0 & k_1 & k_2 & k_3 & \dots \\ k_0 & k_1 & k_2 & k_3 & \dots \\ 0 & k_0 & k_1 & k_2 & \dots \\ 0 & 0 & k_0 & k_1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{pmatrix},$$

$$k_0 > 0, \quad k_2 + k_3 + \dots > 0, \quad \sum_{i=0}^{\infty} k_i = 1,$$

$$K(\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} k_i \lambda^i, \quad (|\lambda| \leq 1).$$

例 5.5 已证:

$$(1) \quad \lim_{\lambda \uparrow 1} \frac{dK(\lambda)}{d\lambda} < 1 \iff E = R_1^+,$$

$$(2) \quad \lim_{\lambda \uparrow 1} \frac{dK(\lambda)}{d\lambda} = 1 \iff E = R_1^0 \implies P \text{ 不可逆},$$

$$(3) \quad \lim_{\lambda \uparrow 1} \frac{dK(\lambda)}{d\lambda} > 1 \iff E = N \implies P \text{ 不可逆}.$$

在情况(1) 下,

$$\Pi = 1\pi', \quad \pi' = (\pi_0, \pi_1, \dots),$$

$$\Pi(\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i \lambda^i, \quad (|\lambda| \leq 1),$$

$$\Pi(\lambda) = \frac{c(1-\lambda)K(\lambda)}{K(\lambda) - \lambda}, \quad (|\lambda| < 1),$$

$$c = 1 - \lim_{\lambda \uparrow 1} \frac{dK(\lambda)}{d\lambda} > 0.$$

因为  $k_2 + k_3 + \dots > 0$ , 所以存在一个  $k_j > 0$ , ( $j \geq 2$ ),

因此  $\pi_0 p_{0,j} = c k_j > 0$ ,

但是  $\pi_j p_{j,0} = 0$ . 所以在情况(1)下,  $P$ 是不可逆的. 总之,  $P$ 恒为不可逆.

## § 8. 马尔可夫链的泛函的极限分布

在这一节中, 恒设  $\{X_n, n \geq 0\}$  是概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  上的一个时齐的可数状态的马尔可夫链, 其状态空间  $E = R_1^+$  由一个正类所构成, 其转移阵为  $P = (p_{ij}, i, j \in E)$ . 再设  $f$  是定义在  $E$  上的一个实值函数,  $y_n = f(X_n), S_n = \sum_{j=0}^n y_j, n = 0, 1, 2, \dots$ . 由于  $E = R_1^+$ , 所以, 任取  $i \in E, \{X_n, n \geq 0\}$  无穷多次处于状态  $i$  的概率为 1. 因此除去一个  $\Omega$  中的零概率集  $\Lambda$ , 对每一个  $\omega \in \Omega - \Lambda$ , 序列  $\{X_n(\omega), n \geq 0\}$  有无穷多项为  $i$ . 不失普遍性, 可设对每一个  $\omega \in \Omega, \{X_n(\omega), n \geq 0\}$  均含一个恒为  $i$  的子序列, 令此子序列为:  $\{X_{\tau_\nu(i, \omega)}(\omega), \nu = 1, 2, \dots\}$ , 此即  $\tau_\nu(i, \omega)$  是  $\{X_n(\omega), n \geq 0\}$  第  $\nu$  次处于状态  $i$  的时刻, 显然,

$$\tau_1(i, \omega) < \tau_2(i, \omega) < \dots < \tau_\nu(i, \omega) < \dots, \omega \in \Omega, i \in E,$$

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \tau_\nu(i, \omega) = \infty, \omega \in \Omega, i \in E.$$

简记  $\tau_\nu(i, \cdot)$  为  $\tau_\nu(i)$ . 再令

$$\rho_\nu(i) = \tau_{\nu+1}(i) - \tau_\nu(i),$$

$l(n, i)$  是由不等式

$$\tau_{l(n, i)}(i) \leq n < \tau_{l(n, i) + 1}(i), (n \geq 1), \quad (8.1)$$

所确定的唯一的非负整值随机变量。(显然,  $\tau_\nu(i), \rho_\nu(i), l(n, i)$  都是随机变量.) 由于本节均考虑  $E$  中一个固定状态  $i$ , 所以有时把  $i$  略去不写, 而把  $\tau_\nu(i), \rho_\nu(i), l(n, i)$  简写成  $\tau_\nu, \rho_\nu, l(n)$ . 令

$$Y_\nu = \sum_{i=\tau_\nu}^{\tau_{\nu+1}-1} y_i, \quad (8.2)$$

则

$$S_n = \sum_{j=0}^n y_j = \sum_{j=0}^{r_1-1} y_j + \sum_{v=1}^{l(n)} Y_v = \sum_{j=n+1}^{r_{l(n)+1}-1} y_j,$$

若令

$$Y' = \sum_{j=0}^{r_1-1} y_j, \quad Y''(n) = \sum_{j=n+1}^{r_{l(n)+1}-1} y_j,$$

则有

$$S_n = Y' + \sum_{v=1}^{l(n)} Y_v = Y''(n). \quad (8.3)$$

再设  $E(Y_v)$  存在。令  $\mu = E(Y_v)/E(\rho_v)$ ,

$$\bar{f} = f - \mu, \quad z_j = \bar{f}(X_j) = y_j - \mu,$$

$$Z_v = \sum_{j=r_v}^{r_{v+1}-1} z_j, \quad U_v = \sum_{j=r_v}^{r_{v+1}-1} |z_j|,$$

则有

$$\begin{aligned} S_n - n\mu &= \sum_{j=0}^{r_1-1} z_j + \sum_{v=1}^{l(n)} Z_v = \sum_{j=n+1}^{r_{l(n)+1}-1} z_j \\ &\stackrel{\text{记作}}{=} Z' + \sum_{v=1}^{l(n)} Z_v = Z''(n). \end{aligned} \quad (8.4)$$

再设  $E(U_v^2) < \infty$ ,  $0 < \sigma^2 = \text{Var}(Z_v) = E(Z_v^2) < \infty$  (其中  $\text{Var}(Z_v) \equiv E(Z_v^2) - E(Z_v)^2$  表  $Z_v$  的方差)。令  $B = \pi_i \sigma^2$ , 其中  $\pi_i = \pi_{i,j}$ ,  $\Pi = (\pi_{i,j})$ ,  $j, i \in E$ ) 是  $P$  的遍历极限, 因为  $E = R_1^+$ , 从而  $\pi_i > 0$ 。再令

$$S_r^*(n) = \frac{S_r - r\mu}{\sqrt{nB}}, \quad W_v = \frac{Z_v}{\sigma}, \quad (8.5)$$

由 [1] P.78 定理 3 得知  $\{W_v, v \geq 1\}$  是相互独立相同分布的随机变量序列, 而且  $E(W_v) = 0$ ,  $\text{Var}(W_v) = 1$ 。对任意正整数  $n, r$ , 及正数  $b$ , 令

$$Q_n = \sum_{i=1}^n W_i, \quad Q_i^*(b) = \sum_{i=1}^n W_i / \sqrt{b}. \quad (8.6)$$

如  $n(\omega)$ ,  $m(\omega)$  是定义在  $\Omega$  上的非负整值函数,  $A_1, A_2, \dots$  为  $\Omega$  中一族子集,  $n \leq m$ , 则定义  $\bigcup_{i=n}^m A_i$  为,  $\omega \in \bigcup_{i=n}^m A_i \iff$  对一切  $n(\omega) \leq i \leq m(\omega)$ , 有  $\omega \in A_i$ . 仿之可定义  $\bigcap_{i=n}^m A_i$ .

定义 8.1. 令

$C = \{\xi(t) | \xi(t) \text{ 是定义在 } [0, 1] \text{ 上的实值连续函数, } \xi(0) = 0\}$ ,

$\mathscr{H}$  是使一切  $h_i(t \in [0, 1])$  为可测的  $\sigma$  代数, 其中  $h_i(\xi) = \xi(t)$  是  $\xi$  的坐标函数,

$W$  是  $\mathscr{H}$  上的由下列关系确定的概率测度: 对任何正整数  $n$ , 任何  $0 = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \leq 1$ , 任何一维波勒尔集合  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , 有

$$W(\{h_{t_1} - h_{t_0} \in A_1, \dots, h_{t_n} - h_{t_{n-1}} \in A_n\}) \\ = \prod_{j=1}^n \int_{A_j} e^{-\frac{x_j^2}{2(t_j - t_{j-1})}} / \sqrt{2\pi(t_j - t_{j-1})} \cdot dx_j.$$

称  $(C, \mathscr{H}, W)$  为维纳测度空间,  $W$  为维纳测度.

定理 8.1. 令  $I_{k,j} = \left(\frac{j-1}{k}, \frac{j}{k}\right]$ ,  $j=1, 2, \dots, k, k=1, 2,$

$\dots$ ,

$$u_n(t, \lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{cases} \lambda_1, & \text{若 } t=0, \\ \lambda_j, & \text{若 } t \in I_{n,j}, j=1, \dots, n, \end{cases}$$

$$X = \left\{ \xi(t) \left| \begin{array}{l} \xi(t) \text{ 是定义在 } [0, 1] \text{ 上的有界实值} \\ \text{函数, 且除了有限个跳跃点以外均连续} \end{array} \right. \right\},$$

在  $X$  中定义距离  $\rho$ :  $\rho(\xi_1, \xi_2) = \sup_{t \in [0, 1]} |\xi_1(t) - \xi_2(t)|$ , 令  $\mathscr{D}$  是由

距离  $\rho$  所产生的拓扑,  $\mathscr{B}^X$  是拓扑  $\sigma$  代数, 即是由全体开集所产生的  $\sigma$  代数. 于是有可测拓扑空间  $(X, \mathscr{C}, \mathscr{B}^X)$ . 设  $C_1 \subset C$  ( $C$  之定义见定义 8.1)  $\subset X$ ,  $W(C_1) = 1$ ,  $F(\xi)$  是定义在  $X$  上的泛函, 且对  $\mathscr{C}$  拓扑来说在  $C_1$  上连续, 对  $\mathscr{B}^X$  来说可测, 则

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P(F(u_n(t); S^*_{-1}(n), \dots, S^*_n(n))) &< \lambda) \\ &= W(F(\xi) < \lambda) \end{aligned} \quad (8.7)$$

在  $W(F(\xi) < \lambda)$  的任一连续点  $\lambda$  上成立.

此定理的证明较长, 须要一系列引理.

**引理 8.1.** 令  $k$  为固定正整数,  $\alpha_j \leq \beta_j$  为固定实数, ( $j = 1, 2, \dots, k$ ),  $n_j = \left[ \frac{jn}{k} \right]$ ,  $\tilde{n}_j = \left[ \frac{j\tilde{n}}{k} \right]$ , ( $j = 0, 1, \dots, k$ ), 其中  $[x]$  表不大于  $x$  的最大整数,

$$\bigwedge_n = \{\omega \mid \omega \in \Omega, \alpha_j \leq Q; (l(n)) \leq \beta_j, n_{j-1} < r \leq n_j, j = 1, \dots, k\},$$

$$\begin{aligned} \tilde{\bigwedge}_n = \{\omega \mid \omega \in \Omega, \alpha_j \leq Q; (l(n)) \leq \beta_j, \tilde{n}_{j-1} < r \leq \tilde{n}_j, \\ j = 1, \dots, k\}, \end{aligned}$$

$$A_{a,b} = (a, b) = \{\omega \mid \omega \in \Omega, a \leq Q; (m) \leq b\},$$

$$\bigwedge = \{\xi \mid \xi \in C, \alpha_j \leq \xi(t) \leq \beta_j, t \in I_{k,j}, j = 1, \dots, k\},$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\bigwedge_n) = \lim_{\tilde{n} \rightarrow \infty} P(\tilde{\bigwedge}_n) = W(\bigwedge). \quad (8.8)$$

**证** 在 [47] 中, 我们已经证明了:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\tilde{\bigwedge}_n) = W(\bigwedge), \quad (8.9)$$

(因为  $\lim_{r \rightarrow \infty} l(r)/r = \pi_1 > 0$ ,  $[a, e]$  对  $P$ ). 用叶果洛夫定理得知: 对

任何给定的  $\varepsilon > 0$ , (不妨令  $\varepsilon < \frac{\pi_1}{2}$ ) 存在正整数  $k_0$  及  $\Omega_1 \in \mathscr{T}$ ,

$P(\Omega_1) > 1 - \varepsilon$ , 使

$$\left| \frac{l(r)}{r} - \pi_1 \right| < \varepsilon, \quad (\omega \in \Omega_1, r \geq k_0). \quad (8.10)$$



令  $\tilde{N}_j = \tilde{n}_j + 2\varepsilon n_j$ ,  $\tilde{M}_j = \tilde{n}_j - 2\varepsilon n_j - 1$ , 则由(8.10)可得

$$\begin{aligned} \Omega_1 \wedge \frac{\cdot}{\pi} &\subset \Omega_1 \left[ \bigcap_{j=2}^k \bigcap_{r=\pi_{j-1}+1}^{\pi_j} A_{l(n), l(r)}^*(\alpha_j, \beta_j) \right. \\ &\quad \left. \bigcap_{r=k_0}^{\pi_1} A_{l(n), l(r)}^*(\alpha_1, \beta_1) \right] \\ &\subset \Omega_1 \left[ \bigcap_{j=2}^k \bigcap_{l(r)=[\pi_{j-1}(\pi_j+\varepsilon)]+1}^{[\pi_j(\pi_j+\varepsilon)]} A_{l(n), l(r)}^*(\alpha_j, \beta_j) \right. \\ &\quad \left. \bigcap_{l(r)=[k_0(\pi_1+\varepsilon)]+1}^{[\pi_1(\pi_1+\varepsilon)]} A_{l(n), l(r)}^*(\alpha_1, \beta_1) \right] \\ &\subset \Omega_1 \left[ \bigcap_{j=2}^k \bigcap_{l(r)=[\pi_{j-1}(\pi_j+\varepsilon)]+1}^{[\pi_j(\pi_j+\varepsilon)]} A_{l(n), l(r)}^*(\alpha_j, \beta_j) \right. \\ &\quad \left. \bigcap_{l(r)=[k_0(\pi_1+\varepsilon)]+1}^{[\pi_1(\pi_1+\varepsilon)]} A_{l(n), l(r)}^*(\alpha_1, \beta_1) \right] \quad (8.11) \end{aligned}$$

令

$$N_j = [n_j(\pi_j + \varepsilon)], \quad M_j = [n_j(\pi_j + \varepsilon)] + 1,$$

$$\bar{k} = [k_0(\pi_1 + \varepsilon)] + 1,$$

若注意  $N_j \leq M_j$ , 且取  $\varepsilon > 0$  充分小, 当  $n$  充分大时有  $N_j > M_{j-1}$ , 再令

$$B_{j-1}^{(n)}(\delta) = \{\omega \mid \omega \in \Omega, \quad |Q_i^*(l(n)) - Q_{M_{j-1}}^*(l(n))| < \delta\},$$

$$(N_{j-1} \leq t \leq M_{j-1}, \quad j=2, \dots, k),$$

$$C_{j-1}^{(n)}(\delta) = \{\omega \mid \omega \in \Omega, \quad |Q_i^*(l(n)) - Q_{N_j}^*(l(n))| < \delta\},$$

$$(N_j \leq t \leq M_j, \quad j=1, \dots, k),$$

$$D_1^{(n)}(\delta) = \{\omega \mid \omega \in \Omega, \quad |Q_i^*(l(n)) - Q_k(l(n))| < \delta\},$$

$$(1 \leq t \leq \bar{k}).$$

则由(8.11)得

$$\begin{aligned} \Omega_1 \wedge \dagger &\subset \Omega_1 G^{(n)}(\delta) \cup \\ &\cup \Omega_1 \overline{G^{(n)}(\delta)} \left[ \bigcap_{j=2}^k \bigcap_{t=[n_j-(\pi_j-\delta)]}^{[n_j-(\pi_j-\delta)]} A_{l(n),t}^\dagger(a_j, \beta_j) \right. \\ &\left. \bigcap_{t=[k_0(\pi_j+\delta)]+1}^{[n_j-(\pi_j-\delta)]} A_{l(n),t}^\dagger(a_j, \beta_j) \right], \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} G^{(n)}(\delta) &= \left[ \bigcap_{j=2}^k \bigcap_{t=N_{j-1}}^{M_{j-1}} B_{j,t}^{(n)}(\delta) \bigcap_{t=N_j}^{M_j} C_{j,t}^{(n)}(\delta) \right. \\ &\left. \bigcap_{t=N_1}^{M_1} C_{1,t}^{(n)}(\delta) \bigcap_{t=1}^{\tilde{k}} D_t^{(n)}(\delta) \right], \end{aligned}$$

$\overline{G^{(n)}(\delta)}$  表  $G^{(n)}(\delta)$  的补集.

所以

$$\begin{aligned} \Omega_1 \wedge \dagger &\subset \Omega_1 G^{(n)}(\delta) \cup \Omega_1 \bigcap_{j=1}^k \bigcap_{t=N_{j-1}}^{M_j} \\ &A_{l(n),t}^\dagger(a_j - \delta, \beta_j + \delta). \end{aligned} \quad (8.12)$$

但是, 由(8.10)得, 当  $n \geq k_0$ ,  $\omega \in \Omega_1$  时有

$$N_j \leq \tilde{n}_j(\omega) \leq M_j, \quad (j=1, \dots, k),$$

所以, 当  $n \geq k_0$  时由(8.12)可得

$$\begin{aligned} \Omega_1 \wedge \dagger &\subset \Omega_1 G^{(n)}(\delta) \cup \Omega_1 \bigcap_{j=1}^k \bigcap_{t=\tilde{n}_{j-1}}^{\tilde{n}_j} \\ &A_{l(n),t}^\dagger(a_j - \delta, \beta_j + \delta) \\ &= \Omega_1 G^{(n)}(\delta) \cup \Omega_1 \widetilde{\bigwedge}_{n,\delta}, \end{aligned} \quad (8.13)$$

其中

$$\begin{aligned} \widetilde{\bigwedge}_{n,\delta} &= \{a_j - \delta \leq Q; (l(n)) \leq \beta_j + \delta, \\ &\tilde{n}_{j-1} < r \leq \tilde{n}_j, \quad j=1, \dots, k\}. \end{aligned}$$

所以, 当  $n \geq k_0$  时有

$$P(\Omega_1 \cap \Lambda_n^*) \leq P(\Omega_1 G^{(n)}(\delta)) + P(\widetilde{\Lambda}_{n,\delta}). \quad (8.14)$$

但是, 当  $n \geq k_0$ ,  $\omega \in \Omega_1$  时, 由(8.10)有

$$l(n, \omega) \geq n(\pi_i - \varepsilon),$$

所以

$$\begin{aligned} & P(\Omega_1 G^{(n)}(\delta)) \\ & \leq \sum_{i=2}^k P(\max_{N_{i-1} \leq t \leq M_{i-1}} |Q_i^*(n(\pi_i - \varepsilon)) - Q_{M_{i-1}}^* \\ & \quad \cdot (n(\pi_i - \varepsilon))| \geq \delta) \\ & \quad + \sum_{j=1}^k P(\max_{N_j \leq t \leq M_j} |Q_i^*(n(\pi_i - \varepsilon)) \\ & \quad - Q_{N_j}^*(n(\pi_i - \varepsilon))| \geq \delta) \\ & \quad + P(\max_{1 \leq i \leq k} |Q_i^*(n(\pi_i - \varepsilon)) - Q_k^*(n(\pi_i - \varepsilon))| \geq \delta). \end{aligned}$$

利用柯尔莫哥洛夫不等式有

$$\begin{aligned} P(\Omega_1 G^{(n)}(\delta)) & \leq 2 \sum_{j=1}^k \frac{(M_j - N_j) \text{Var}\left(\frac{W_v}{\sqrt{n(\pi_i - \varepsilon)}}\right)}{\delta^2} \\ & \quad + \bar{k} \text{Var}\left(\frac{W_v}{\sqrt{n(\pi_i - \varepsilon)}}\right) \\ & \leq 2 \sum_{j=1}^k 2(n_i \varepsilon + 2) \left(\frac{1}{n(\pi_i - \varepsilon) \delta^2}\right) \\ & \quad + \frac{\bar{k}}{n(\pi_i - \varepsilon) \delta^2} \leq \frac{(4n\varepsilon + 8)k + \bar{k}}{n(\pi_i - \varepsilon) \delta^2}. \quad (8.15) \end{aligned}$$

所以, 以(8.15)代入(8.14)并注意  $P(\Omega_1) > 1 - \varepsilon$  可得

$$P(\Lambda_n^*) \leq \varepsilon + P(\widetilde{\Lambda}_{n,\delta}) + \frac{(4n\varepsilon + 8)k + \bar{k}}{n(\pi_i - \varepsilon) \delta^2} \quad (8.16)$$

但是, 由[47]定理2.1有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\tilde{\bigwedge}_{n, \delta}) = W(\bigwedge_{\delta}),$$

其中

$$\bigwedge_{\delta} = \{\xi | \xi \in C, \alpha_j - \delta \leq \xi(t) \leq \beta_j + \delta, t \in I_{k, j}, j=1, \dots, k\}.$$

所以

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P(\bigwedge_n) \leq \varepsilon + W(\bigwedge_{\delta}) + \frac{4ke}{(\pi_i - \varepsilon)\delta^2}. \quad (8.17)$$

$$\text{而} \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} W(\bigwedge_{\delta}) = W(\bigwedge).$$

所以, 在(8.17)中先令  $\varepsilon \rightarrow 0$ , 次令  $\delta \rightarrow 0$  即得

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P(\bigwedge_n) \leq W(\bigwedge). \quad (8.18)$$

仿(8.11),  $n \geq k_0$  时有

$$\begin{aligned} \Omega_1 \tilde{\Lambda}_n &= \Omega_1 \bigcap_{j=1}^k \bigcap_{r=\bar{n}_{j-1}+1}^{\bar{n}_j} A_{I(n), r}^*(\alpha_j, \beta_j) \\ &\subset \Omega_1 \bigcap_{j=2}^k \bigcap_{r=\bar{n}_{j-1}+1}^{\bar{n}_j} A_{I(n), r}^*(\alpha_j, \beta_j) \bigcap_{r=k_1}^{\bar{n}_1} A_{I(n), r}^*(\alpha_1, \beta_1) \\ &\subset \Omega_1 \bigcap_{j=2}^k \bigcap_{r=[(\bar{n}_j-1)/(\pi_j-\varepsilon)]+1}^{[\bar{n}_j/(\pi_j+\varepsilon)]} A_{I(n), I(r)}^*(\alpha_j, \beta_j) \\ &\quad \cdot \bigcap_{r=[k_0/(\pi_1-\varepsilon)]+1}^{[\bar{n}_1/(\pi_1+\varepsilon)]} A_{I(n), I(r)}^*(\alpha_1, \beta_1) \\ &\subset \Omega_1 \bigcap_{j=2}^k \bigcap_{r=[(\pi_j+\varepsilon)\bar{n}_j-1/(\pi_j-\varepsilon)+\frac{1}{\pi_j-\varepsilon}]+1}^{[(\pi_j-\varepsilon)\bar{n}_j/(\pi_j+\varepsilon)]} A_{I(n), I(r)}^*(\alpha_j, \beta_j) \cap \end{aligned}$$

$$\bigcap_{r=[k_0/(\pi_i - \varepsilon)] + 1}^{[(\pi_i - \varepsilon)n/(\pi_i + \varepsilon)]} A_{i(n), l(r)}^*(a_i, \beta_i), \quad (8.19)$$

令

$$k_i = \left[ \frac{k_0}{\pi_i - \varepsilon} \right] + 1, N'_i = \left[ \frac{\pi_i - \varepsilon}{\pi_i + \varepsilon} n_i \right],$$

$$M'_i = \left[ \frac{\pi_i + \varepsilon}{\pi_i - \varepsilon} n_i + \frac{1}{\pi_i - \varepsilon} \right] + 1,$$

则  $N'_i < M'_i$ , 且取  $\varepsilon > 0$  充分小, 当  $n$  充分大后 总有  $N'_i > M'_{i-1}$ .

(8.19)可化为

$$\Omega_1 \tilde{\Lambda}_n \subset \Omega_1 \bigcap_{i=2}^k \bigcap_{r=M'_{i-1}}^{N'_i} A_{i(n), l(r)}^*(a_i, \beta_i) \bigcap_{i=1}^{N'_1} A_{i(n), l(r)}^*(a_i, \beta_i).$$

令

$$\tilde{B}_{i,1}^{(n)}(\delta) = \{\omega | \omega \in \Omega, |Q_i^*(l(n)) - Q_{M'_{i-1}}^*(l(n))| < \delta\},$$

$$(N'_{i-1} \leq t \leq M'_{i-1}, i=2, \dots, k),$$

$$\tilde{C}_{i,1}^{(n)}(\delta) = \{\omega | \omega \in \Omega, |Q_i^*(l(n)) - Q_{N'_i}^*(l(n))| < \delta\},$$

$$(N'_i \leq t \leq M'_i, i=1, \dots, k),$$

$$\tilde{D}_{i,1}^{(n)}(\delta) = \{\omega | \omega \in \Omega, |Q_i^*(l(n)) - Q_{i,1}^*(l(n))| < \delta\},$$

$$\tilde{G}^{(n)}(\delta) = \overline{\left[ \bigcap_{i=2}^k \bigcap_{t=N'_{i-1}}^{M'_{i-1}} \tilde{B}_{i,1}^{(n)}(\delta) \bigcap_{i=N'_1}^{M'_1} \tilde{C}_{i,1}^{(n)}(\delta) \bigcap_{i=N'_1}^{M'_1} \tilde{D}_{i,1}^{(n)}(\delta) \right.}$$

$$\left. \bigcap_{i=1}^{k_1} \tilde{D}_{i,1}^{(n)}(\delta) \right]},$$

则仿(8.13)有

$$\Omega_1 \tilde{\Lambda}_n \subset \Omega_1 \tilde{G}^{(n)}(\delta) \cup$$

$$\begin{aligned} & \bigcup_{i=2}^k \overline{\Omega_1 \bigcap_{r=M'_j-1}^{N'_j} A_{l(n), l(r)}^*(\alpha_j, \beta_j) \bigcap_{r=k_j}^{N_1^*} A_{l(n), l(r)}^*(\alpha_1, \beta_1)} \\ & \quad \subset \Omega_1 \tilde{G}^{(*)}(\delta) \cup \Omega_1 \bigcap_{r=1}^k \bigcap_{r=n_{j-1}+1}^{n_j} A_{l(n), l(r)}^*(\alpha_j - \delta, \beta_j + \delta) \\ & \quad \stackrel{\text{记作}}{=} \Omega_1 \tilde{G}^{(*)}(\delta) \cup \Omega_1 \bigwedge_{n, \delta}^* \end{aligned}$$

其中

$$\bigwedge_{n, \delta}^* = \left\{ \omega \mid \omega \in \Omega, \alpha_j - \delta \leq Q_{l(r)}^*(l(n)) \leq \beta_j + \delta, \begin{matrix} n_{j-1} < r \leq n_j, \\ j=1, \dots, k \end{matrix} \right\}.$$

所以, 若注意  $P(\Omega_1) > 1 - \varepsilon$  则得

$$P(\tilde{\Lambda}_n) \leq \varepsilon + P(\bigwedge_{n, \delta}^*) + P(\Omega_1 \tilde{G}^{(*)}(\delta))$$

从而

$$P(\bigwedge^*) \geq P(\tilde{\Lambda}_{n, \delta}) - \varepsilon - P(\Omega_1 \tilde{G}^{(*)}(\delta)).$$

所以, 由(8.9)有:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} P(\bigwedge^*) \geq W(\bigwedge_{-\delta}) - \varepsilon - \limsup_{n \rightarrow \infty} P(\Omega_1 \tilde{G}^{(*)}(\delta)), \quad (8.20)$$

完全仿照(8.15)可估计

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} P(\Omega_1 \tilde{G}^{(*)}(\delta)) = 0.$$

所以, 在(8.20)中先令  $\varepsilon \rightarrow 0$  次令  $\delta \rightarrow 0$ , 并注意

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} W(\bigwedge_{-\delta}) = W(\bigwedge)$$

则可得

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} P(\bigwedge^*) \geq W(\bigwedge). \quad (8.21)$$

由(8.18)及(8.21)立即得引理8.1。

**引理8.2** (1) 对任何  $\varepsilon > 0$ , 均有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left( \max_{1 \leq r \leq n} \left| \frac{Z''(r)}{\sqrt{\frac{r}{n}}} \right| \geq \varepsilon \right) = 0, \quad (8.22)$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} Z' / \sqrt{n} = 0, [a.e.](P), \quad (8.23)$$

其中  $Z''(r) = \sum_{j=r+1}^{\tau_{l(r)}+1-1} z_j, z_j = y_j - \mu, Z'$  均如(8.4)所定义。

证 (1) 因为  $\tau_{l(r)} \leq r$ , 所以

$$|Z''(r)| \leq \sum_{j=r+1}^{\tau_{l(r)}+1-1} |z_j| \leq \sum_{j=l(r)}^{\tau_{l(r)}+1-1} |z_j| \equiv U_{l(r)}.$$

但是  $0 \leq l(r) \leq r$ , 所以

$$\begin{aligned} P\left(\max_{1 \leq r \leq n} \left| \frac{Z''(r)}{\sqrt{n}} \right| \geq \varepsilon\right) &\leq P\left(\max_{1 \leq r \leq n} \left| \frac{U_{l(r)}}{\sqrt{n}} \right| \geq \varepsilon\right) \\ &\leq P\left(\max_{1 \leq r \leq n} \left| \frac{U_r}{\sqrt{n}} \right| \geq \varepsilon\right). \end{aligned}$$

而  $\{U_r, r \geq 1\}$  是相互独立相同分布的随机变量序列 (证明可参看 [1]P.78), 此外, 我们还假定了  $E(U_r^2) < \infty$ , 所以, 由

$$\begin{aligned} P\left(\max_{1 \leq r \leq n} \left| \frac{Z''(r)}{\sqrt{n}} \right| \geq \varepsilon\right) &\leq n P(U_r \geq \varepsilon \sqrt{n}) \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{(U_r \geq \varepsilon \sqrt{n})} U_r^2 dP \end{aligned}$$

可得(1)。

至于(2) 的证明, 可见[1] § 14。

**引理8.3.** 设  $S_r^*(n) = (S_r - \mu r) / \sqrt{nB}$  如(8.5)所定义, 再令  $\bigwedge_n^{**} = \{\omega | \omega \in \Omega, \alpha_j \leq S_r^*(n) \leq \beta_j, n_{j-1} < r \leq n_j, j=1, \dots, k\},$

则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\bigwedge_n^{**}) = W(\bigwedge). \quad (8.24)$$

证 由(8.4)、(8.5)有

$$S_r^*(n) = \frac{1}{\sqrt{nB}} \left( Z' + \sum_{v=1}^{l(r)} Z_v - Z''(r) \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{nB}} (Z' - Z''(r)) + \left( \sqrt{\frac{l(n)}{n\pi_i}} \sum_{v=1}^{l(r)} \frac{W_v}{\sqrt{l(n)}} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{nB}} (Z' - Z''(r)) + \sqrt{\frac{l(n)}{n\pi_i}} Q_{i(r)}(l(n)) \\
&= \sqrt{\frac{l(n)}{n\pi_i}} \left( \sqrt{\frac{\pi_i}{l(n)B}} (Z' - Z''(r)) + Q_{i(r)}(l(n)) \right).
\end{aligned}$$

令

$$V_i^*(n) = \sqrt{\frac{\pi_i}{l(n)B}} (Z' - Z''(r)) + Q_{i(r)}(l(n)),$$

$$\begin{aligned}
\bigwedge_{i=1}^k = \{ \omega \mid \omega \in \Omega, \quad a_i \leq V_i^*(n) \leq B_i, \quad n_{i-1} < r \leq n_i, \\
j=1, \dots, k \},
\end{aligned}$$

则由引理8.2得知(注意  $\lim_{n \rightarrow \infty} l(n)/n = \pi_i$ ,  $[a, l.]$ )

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left( \sqrt{\frac{\pi_i}{l(n)B}} \max_{1 \leq r \leq n} |Z' - Z''(r)| \geq \varepsilon \right) = 0,$$

所以若令

$$\Omega_2(\varepsilon) = \left\{ \omega \mid \omega \in \Omega, \sqrt{\frac{\pi_i}{l(n)B}} \max_{1 \leq r \leq n} |Z' - Z''(r)| \geq \varepsilon \right\},$$

则有:

$$\begin{aligned}
\bigwedge_{i=1}^k &\subset \Omega_2(\varepsilon) \cup \bigwedge_{i=1}^k \overline{[\Omega_2(\varepsilon)]} \\
&\subset \Omega_2(\varepsilon) \cup \{ a_i, -\varepsilon \leq Q_{i(r)}(l(n)) \leq B_i + \varepsilon, \quad n_{i-1} < r \leq n_i, \\
&j=1, \dots, k \}.
\end{aligned}$$

因此, 由引理8.1有:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P(\bigwedge_{i=1}^k) \leq W(\bigwedge_\varepsilon),$$

令  $\varepsilon \rightarrow 0$  即得

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P(\bigwedge_{i=1}^k) \leq W(\bigwedge).$$

仿之可证

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} P(\bigwedge_{i=1}^k) \geq W(\bigwedge).$$



因此,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\wedge : ** ) = W(\wedge). \quad (8.25)$$

又 
$$S_i(n) = \sqrt{\frac{l(n)}{n\pi_i}} V_i(n),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{l(n)}{n\pi_i}} = 1, \quad [a.e.],$$

所以, 对任何  $\varepsilon > 0$ ,  $\eta > 0$ , 均存在  $\Omega_0 \subset \Omega$ ,  $P(\Omega_0) > 1 - \eta$ , 及  $\bar{n}_0$  (不依赖  $\omega$ ) 使

$$\max \left\{ \left| \frac{1 - \delta(n, \omega)}{\delta(n, \omega)} \right|, |1 - \delta(n, \omega)| \right\} \leq \min \left\{ \frac{\varepsilon}{D}, \varepsilon \right\},$$

$$(n \geq \bar{n}_0, \omega \in \Omega_0),$$

其中

$$\delta(n) = \sqrt{l(n)/n\pi_i}, \quad D = \max\{|\alpha_1|, \dots, |\alpha_k|, |\beta_1|, \dots, |\beta_k|\}.$$

因此,

$$\begin{aligned} \wedge : * &\subset \wedge : * \Omega_0 \cap \bar{\Omega}_0 \\ &= \{\omega | \omega \in \Omega, \alpha_i \leq \delta_{(n)} V_i(n) \leq \beta_i, n_{i-1} < r \leq n_i, i=1, \\ &\quad \dots, k\} \Omega_0 \cup \bar{\Omega}_0. \end{aligned}$$

但是, 当  $n \geq \bar{n}_0$  时, 任取  $\omega \in \Omega_0 \cap \{\omega | \omega \in \Omega, \alpha_i \leq \delta_{(n)} V_i(n) \leq \beta_i\}$ , 必有

$$\begin{aligned} V_i(n, \omega) &\leq V_i(n, \omega) \delta(n, \omega) + \left| \frac{1 - \delta(n, \omega)}{\delta(n, \omega)} \right| |\delta(n, \omega) V_i(n, \omega)| \\ (n, \omega) &\left| \leq \beta_i + \min \left\{ \frac{\varepsilon}{D}, \varepsilon \right\} D \leq \beta_i + \varepsilon, \end{aligned}$$

仿之可证,

$$\begin{aligned} V_i(n, \omega) &\geq V_i(n, \omega) \delta(n, \omega) - \left| \frac{1 - \delta(n, \omega)}{\delta(n, \omega)} \right| |\delta(n, \omega) V_i(n, \omega)| \\ &\geq \alpha_i - \min \left\{ \frac{\varepsilon}{D}, \varepsilon \right\} D \geq \alpha_i - \varepsilon, \end{aligned}$$

所以,  $n \geq \bar{n}_0$  时有

$$\begin{aligned} \bigwedge_{n,i}^* \subset \bar{\Omega}_0 \cup \{\omega \mid \omega \in \Omega, \alpha_i - \varepsilon \leq V_i^*(n) \leq \beta_i + \varepsilon, n_{i-1} < r \\ \leq n_i, j=1, \dots, k\} \stackrel{\text{记作}}{=} \bar{\Omega}_0 \cup \bigwedge_{n,i}^*. \end{aligned}$$

而由(8.25)有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\bigwedge_{n,i}^*) = W(\bigwedge).$$

所以

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P(\bigwedge_{n,i}^*) \leq W(\bigwedge) + \varepsilon, \quad (8.26)$$

令  $\varepsilon \rightarrow 0$  即得:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P(\bigwedge_{n,i}^*) \leq W(\bigwedge). \quad (8.27)$$

仿之可证

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} P(\bigwedge_{n,i}^*) \geq W(\bigwedge). \quad (8.28)$$

由(8.27)、(8.28)即得引理8.3.

**引理8.4. 令**

$$\begin{aligned} H_n = \{\omega \mid \omega \in \Omega, \alpha_j \leq u_n(t; S_1^*(n), \dots, S_k^*(n)) \leq \beta_j, t \in I_{k,j}, \\ j=1, \dots, k, \}, \end{aligned}$$

$$p_j^{(n)}(\omega) = \sup_{t \in I_{k,j}} u_n(t; S_1^*(n), \dots, S_k^*(n)), \quad j=1, \dots, k,$$

$$q_j^{(n)}(\omega) = \inf_{t \in I_{k,j}} u_n(t; S_1^*(n), \dots, S_k^*(n)), \quad j=1, \dots, k,$$

$$p_j(\xi) = \sup_{t \in I_{k,j}} \xi(t), \quad q_j(\xi) = \inf_{t \in I_{k,j}} \xi(t), \quad \xi \in C, j=1, \dots, k,$$

则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(H_n) = W(\bigwedge), \quad (8.29)$$

即是

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\bar{\Omega}} \chi_r(p_1^{(n)}, \dots, p_k^{(n)}; q_1^{(n)}, \dots, q_k^{(n)}) P(d\omega) \\ = \int_{\bar{\Omega}} \chi_r(p_1, \dots, p_k; q_1, \dots, q_k) W(d\xi), \end{aligned} \quad (8.30)$$

其中  $\Gamma = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_{2k}) \mid -\infty < \lambda_i \leq \beta_i, \alpha_i \leq \lambda_{i+k} < \infty, j=1, \dots, k\}$ ,  $\chi_\Gamma$  代表  $\Gamma$  上的示性函数, 即  $\chi_\Gamma(\lambda) = 1$  当  $\lambda \in \Gamma$ ,  $\chi_\Gamma(\lambda) = 0$  当  $\lambda \notin \Gamma$ .

证. 令

$$\Phi_n^* = \{\omega \mid \omega \in \Omega, \alpha_j \leq S_j^*(n) \leq \beta_j, n_{j-1} + 1 < i \leq n_j, j=1, \dots, k\},$$

$$\Phi_{n,\eta}^* = \{\omega \mid \omega \in \Omega, \alpha_j - \eta \leq S_j^*(n) \leq \beta_j + \eta, n_{j-1} + 1 < i \leq n_j, j=1, \dots, k\},$$

$$\Psi_{n,\eta}^* = \{\omega \mid \omega \in \Omega, \max\{|S_{n_{j-1}+1}^*(n) - S_{n_{j-1}+2}^*(n)|, |S_{n_j+1}^*(n) - S_{n_j}^*(n)|, j=1, \dots, k\} \geq \eta\},$$

则

$$\begin{aligned} \Lambda_{n,\eta}^{*,*} &\subset \Phi_n^* \subset (\Psi_{n,\eta}^* \cup (\Phi_n^* \cap \bar{\Psi}_{n,\eta}^*)) \\ &\subset (\Psi_{n,\eta}^* \cup \Lambda_{n,\eta}^{*,*}), \end{aligned} \quad (8.31)$$

其中

$$\Lambda_{n,\eta}^{*,*} = \{\omega \mid \omega \in \Omega, \alpha_j - \eta \leq S_j^*(n) \leq \beta_j + \eta, n_{j-1} < i \leq n_j, j=1, \dots, k\}.$$

又因为  $k$  是固定的, 所以  $n$  充分大时有:

$$I_{n,1}, (j-1)n/k+2, \dots, I_{n,(j-1)n/k+k} \subset I_{k,j}, (j=1, \dots, k). \quad (8.32)$$

所以, 若令

$$J_{k,j}^{(n)} = I_{k,j} \cap \left( \bigcup_{i=[(j-1)n/k]+2}^{[(j)n/k]} I_{n,i} \right),$$

则当  $n$  充分大时, 由  $u_n(t; \lambda_1, \dots, \lambda_n)$  的定义有

$$\begin{aligned} H_n &= \bigcap_{j=1}^k \{\alpha_j \leq u_n(t; S_1^*(n), \dots, S_n^*(n)) \leq \beta_j, t \in I_{k,j}\} \\ &= \bigcap_{j=1}^k \{\alpha_j \leq u_n(t; S_1^*(n), \dots, S_n^*(n)) \leq \beta_j, t \in J_{k,j}^{(n)}\} \cap \\ &\quad \bigcap_{j=1}^k \{\alpha_j \leq u_n(t; S_1^*(n), \dots, S_n^*(n)) \leq \beta_j, \\ &\quad t \in \bigcup_{i=[(j-1)n/k]+2}^{[(j)n/k]} I_{n,i}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \bigcap_{j=1}^k \{a_j \leq u_n(t; S_1^*(n), \dots, S_n^*(n)) \leq \beta_j, t \in J_{k,j}^{(*)}\} \cap \\
&\quad \bigcap_{j=1}^k \{a_j \leq S_i^*(n) \leq \beta_j, [(j-1)n/k] + 2 \leq i \leq [jn/k]\} \\
&= \bigcap_{j=1}^k \{a_j \leq u_n(t; S_1^*(n), \dots, S_n^*(n)) \leq \beta_j, \\
&\quad t \in J_{k,j}^{(*)}\} \cap \Phi_n^*. \tag{8.33}
\end{aligned}$$

但是,  $n$  充分大后有

$$J_{k,j}^{(*)} \subset I_{n, [(j-1)n/k] + 1} \cup I_{n, [jn/k] + 1}, \tag{8.34}$$

所以

$$\begin{aligned}
&\bigcap_{j=1}^k \{a_j \leq u_n(t; S_1^*(n), \dots, S_n^*(n)) \leq \beta_j, t \in J_{k,j}^{(*)}\} \\
&\supset \bigcap_{j=1}^k \{a_j \leq u_n(t; S_1^*(n), \dots, S_n^*(n)) \leq \beta_j, \\
&\quad t \in I_{n, [(j-1)n/k] + 1} \cup I_{n, [jn/k] + 1}\} \\
&= \bigcap_{j=1}^k \{a_j \leq S_{n, j-1+1}^*(n) \leq \beta_j, a_j \leq S_{n, j+1}^*(n) \leq \beta_j\}. \tag{8.35}
\end{aligned}$$

因此, 由 (8.33) 及 (8.35) 有

$$\Phi_n^* \supset H_n \supset (\Phi_{n, -\eta}^* \cap \bar{\Psi}_{n, \eta}^*), \quad (n \text{ 充分大}),$$

所以

$$(\Phi_n^* \cup \Psi_{n, \eta}^*) \supset (H_n \cup \Psi_{n, \eta}^*) \supset \Phi_{n, -2\eta}^*. \tag{8.36}$$

但是,

$$\begin{aligned}
P(\Psi_{n, \eta}^*) &\leq P(\max_{1 \leq j \leq k} |S_{n, j-1+1}^*(n) - S_{n, j-1+2}^*(n)| \geq \eta) \\
&\quad + P(\max_{1 \leq j \leq k} |S_{n, j+1}^*(n) - S_{n, j}^*(n)| \geq \eta),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{而 } P(\max_{1 \leq j \leq k} |S_{n, j+1}^*(n) - S_{n, j}^*(n)| \geq \eta) \\
= P(\max_{1 \leq j \leq k} |y_{n, j+1} - \mu| \geq \eta \sqrt{nB}),
\end{aligned}$$

$$U_v = \sum_{j=\tau_v}^{\tau_{v+1}-1} |z_j| = \sum_{j=\tau_v}^{\tau_{v+1}-1} |y_j - \mu|, \quad \tau_{l(n)} \leq n < \tau_{l(n)+1},$$

所以

$$|y_n - \mu| \leq \sum_{j=\tau_{l(n)}}^{\tau_{l(n)+1}-1} |y_j - \mu| = U_{l(n)},$$

因此, 仿引理8.2有:

$$\begin{aligned} & P(\max_{1 \leq j \leq k} |S_{n_j+1}^*(n) - S_{n_j}^*(n)| \geq \eta) \\ & \leq P(\max_{1 \leq j \leq k} U_{l(n_j+1)} \geq \sqrt{nB}) \\ & \leq P(\max_{1 \leq r \leq n+1} U_r \geq \eta \sqrt{nB}) \rightarrow 0, \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\Psi_{n,\eta}^*) = 0. \quad (8.37)$$

由 (8.37)、(8.31) 及引理8.3 得知

$$\begin{aligned} W(\Lambda) &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(\Lambda_n^{*,*}) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} P(\Phi_n^*) \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} P(\Phi_n^*) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} P(\Lambda_{n,\eta}^{*,*}) + \lim_{n \rightarrow \infty} P(\Psi_{n,\eta}^*) \\ &= W(\Lambda_\eta). \end{aligned} \quad (8.38)$$

在 (8.38) 中令  $\eta \rightarrow 0$  并注意  $\lim_{n \rightarrow 0} W(\Lambda_\eta) = W(\Lambda)$  则得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\Phi_n^*) = W(\Lambda). \quad (8.39)$$

由 (8.36)、(8.37)、(8.39) 得:

$$W(\Lambda) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} P(H_n) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} P(H_n) \geq W(\Lambda_{-\eta}). \quad (8.40)$$

在 (8.40) 中令  $\eta \rightarrow 0$  即得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(H_n) = W(\Lambda). \quad (8.41)$$

引理8.4得证.

**引理8.5.** 若  $F(\xi)$  是定义在  $X$  上的有界泛函, 而且对  $\mathcal{B}$  拓扑来说在  $C_1$  上连续, 对  $\mathcal{B}^X$  可测,  $C_1 \subset C \subset X$ ,  $W(C_1) = 1$ , 则

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} F(u_n(t, S_1^*(n), \dots, S_k^*(n))) P(d\omega) \\ &= \int_C F(\xi) W(d\xi). \end{aligned}$$

证 从引理8.4中 (8.30) 出发, 可以证明: 若  $f(\lambda_1, \dots, \lambda_{2k})$  是  $2k$  维波勒尔可测函数, 而且有界, 在任何  $2k$  维区间上黎曼可积, 则

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f(p_1^{(n)}, \dots, p_k^{(n)}; q_1^{(n)}, \dots, q_k^{(n)}) P(d\omega) \\ &= \int_C f(p_1, \dots, p_k; q_1, \dots, q_k) W(d\xi). \end{aligned} \quad (8.42)$$

(详见[47]定理2.3).

又因为对任何一个满足引理8.5中的条件的  $F(\xi)$  来说, 对任何  $\varepsilon > 0$ , 都存在  $X$  上的有界泛函  $F_1(\xi)$ ,  $F_2(\xi)$ , 使

$$\begin{aligned} & F_1(\xi) \leq F(\xi) \leq F_2(\xi), \quad \xi \in X, \\ & \int_C (F_2(\xi) - F_1(\xi)) W(d\xi) \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

而且  $F_i(\xi)$  可以表为

$F_i(\xi) = f_i(p_1(\xi), \dots, p_k(\xi); q_1(\xi), \dots, q_k(\xi)), (i=1, 2)$ , 其中  $f_i$  是  $2k$  维的有界的波勒尔可测函数, 在任何  $2k$  维区间上黎曼可积. 故由 (8.42) 得引理8.5。

**引理8.6.** 设  $F(\xi)$  满足定理8.1中的条件, 则

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} e^{i \nu F(u_n(t; s_1^*(n), \dots, s_k^*(n)))} P(d\omega) \\ &= \int_C e^{i \nu F(\xi)} W(d\xi). \end{aligned} \quad (8.43)$$

证 由引理8.5即得引理8.6。

利用引理8.6及分布函数与特征函数之间的连续性定理 即得定理8.1。

**例8.1.** 若取 $F(\xi) = \xi(1)$ , 则 $F$ 满足定理8.1中的条件, 且

$$F(u_n(t; S_1^*(n), \dots, S_n^*(n))) = S_n^*(n),$$

所以由定理8.1有

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P(S_n^*(n) < \lambda) &= W(F(\xi) < \lambda) \\ &= W(\{\xi \mid \xi(1) < \lambda\}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\lambda} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt. \end{aligned}$$

## 第二篇 可数状态的时齐 的马尔可夫过程

### § 1. $P$ 过程的概率空间, 存在性定理

令  $\mathbf{T} = [0, \infty)$  为时间参数集,  $E$  为任一可数集 (不妨令  $E$  为非负整数集).

**定义 1.1.** 设  $p_{i,j}(t)$  是定义在  $\mathbf{T}$  上的非负实值函数, ( $t, j \in E$ ), 称矩阵  $P(t) = (p_{i,j}(t), i, j \in E)$  是准转概阵. 如果 (1)  $P(t) \mathbf{1} \leq \mathbf{1}$ ; (2)  $P(s+t) = P(s)P(t)$ , ( $0 \leq s, t < \infty$ ). 特别地, 若 (1) 中不等号换成等号, 则称  $P(t)$  是转概阵, 满足  $P(0) = P(0+) = I$  的 (准) 转概阵称为标准的, (此处  $I$  为单位阵). (2) 称为  $K-C$  方程.

如不特别声明, 今后凡遇矩阵之间比较大小, 取极限、连续、微商、积分…等, 均系逐元意义下的.

令  $\Omega = E^{\mathbf{T}}$  为乘积空间,  $\Omega$  中的元  $\omega$  是  $\mathbf{T}$  到  $E$  之变换,  $P(t) = (p_{i,j}(t), i, j \in E)$  是转概阵,  $P(0) = I$ . 任取  $t \in \mathbf{T}$ ,  $A \subset E$ , 记  $\left[ \begin{smallmatrix} t \\ A \end{smallmatrix} \right] = \{\omega | \omega(t) \in A\}$ , 特别地, 若  $A$  是单点集  $\{j\}$ , 则记  $\left[ \begin{smallmatrix} t \\ A \end{smallmatrix} \right] = \left[ \begin{smallmatrix} t \\ j \end{smallmatrix} \right]$ .

若  $A_1, \dots, A_n \in E$ , 则记  $\bigcap_{i=1}^n \left[ \begin{smallmatrix} t_i \\ A_i \end{smallmatrix} \right] = \left[ \begin{smallmatrix} t_1, \dots, t_n \\ A_1, \dots, A_n \end{smallmatrix} \right]$ .

令  $\mathcal{F} = \sigma \left( \left[ \begin{smallmatrix} t \\ j \end{smallmatrix} \right], t \in \mathbf{T}, j \in E \right)$ ,

$$P^j \left( \left[ \begin{smallmatrix} t_1, \dots, t_n \\ i_1, \dots, i_n \end{smallmatrix} \right] \right) = p_{i_1, j_1}(t_1) p_{j_1, i_2}(t_2 - t_1)$$



$$\cdots p_{i_{n-1}, i_n}(t_n - t_{n-1}),$$

$(i, i_1, \dots, i_n \in E, 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n)$ , 用柯尔莫哥洛夫定理,  $P^i$  可唯一地扩张到  $\mathcal{F}$  上去而成一概率测度, 仍用  $P^i$  记之, 于是得概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, P^i)$ ,  $(i \in E)$ .

再定义一族由  $\Omega$  到  $\Omega$  的推移算子  $\theta_t$  ( $t \in T$ ) 如下: 任取  $\omega = \omega(t) \in \Omega$ , 定义  $\theta_t \omega = \bar{\omega}$ ,  $\bar{\omega}(s) = \omega(s+t)$  ( $s \in T$ ). 令  $X_t$  是  $\Omega$  上的坐标变换:  $X_t(\omega) = \omega(t)$ ,  $t \in T$ ,  $\omega \in \Omega$ . 称  $X = (\Omega, \mathcal{F}, X_t, \theta_t, P^i)$ ,  $i \in E$  为  $P$  过程.  $(\Omega, \mathcal{F}, P^i)$  为  $P$  过程的概率空间.

令  $\mathcal{F}_s = \sigma\left(\left[\begin{smallmatrix} u \\ j \end{smallmatrix}\right], u \leq s, i \in E\right)$ , 仿第一篇(1.1), 有

$$(M): P^i\left(A \cap \left[\begin{smallmatrix} s \\ j \end{smallmatrix}\right] \cap \theta_{t-1}^{-1}B\right) = P^i\left(A \cap \left[\begin{smallmatrix} s \\ j \end{smallmatrix}\right]\right) P^j(\theta_{t-1}^{-1}B),$$

(1.1)

$(i, j \in E, A \in \mathcal{F}_s, B \in \mathcal{F}, t \geq s \geq 0)$ .

证 (1) 先取  $A = \left[\begin{smallmatrix} u \\ k \end{smallmatrix}\right]$   $u \leq s$ ,  $k \in E$  固定. 对任何  $B = \left[\begin{smallmatrix} v \\ l \end{smallmatrix}\right]$ ,

$v \geq 0, l \in E$ , 有

$$\begin{aligned} P^i\left(A \cap \left[\begin{smallmatrix} s \\ j \end{smallmatrix}\right] \cap \theta_{t-1}^{-1}B\right) &= P^i\left(\left[\begin{smallmatrix} u, s, t+v \\ k, j, l \end{smallmatrix}\right]\right) \\ &= p_{i,k}(u) p_{k,j}(s-u) p_{j,l}(t+v-s) \\ &= P^i\left(A \cap \left[\begin{smallmatrix} s \\ j \end{smallmatrix}\right]\right) P^j(\theta_{t-1}^{-1}B). \end{aligned}$$

而使 (1.1) 成立的  $B$  构成一个  $\sigma$  代数, 所以对任何  $A = \left[\begin{smallmatrix} u \\ k \end{smallmatrix}\right]$ ,

$u \leq s$ ,  $k \in E$ ,  $B \in \mathcal{F}$ , (1.1) 成立.

(2) 又因为任取  $B \in \mathcal{F}$ , 使 (1.1) 成立的  $A$  构成一个  $\sigma$  代数, 所以, 由 (1) 即得 (1.1) 对任何  $A \in \mathcal{F}_s$ ,  $B \in \mathcal{F}$  成立.

特别地, 取  $t = s = t_*$ ,  $A = \left[\begin{smallmatrix} t_1, \dots, t_{n-1} \\ A_1, \dots, A_{n-1} \end{smallmatrix}\right]$ ,

$B = \left[ \begin{array}{c} t_{n+1} - t_n, \dots, t_{n+m} - t_n \\ A_{n+1}, \dots, A_{n+m} \end{array} \right], 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq t_{n+1} \leq \dots \leq t_{n+m}, A_i \subset E, (i=1, \dots, n+m),$  则 (1.1) 变成

$$\begin{aligned} (M_1): P\left(\left[ \begin{array}{c} t_1, \dots, t_{n-1}, t_n, t_{n+1}, \dots, t_{n+m} \\ A_1, \dots, A_{n-1}, j, A_{n+1}, \dots, A_{n+m} \end{array} \right]\right) \\ = P\left(\left[ \begin{array}{c} t_1, \dots, t_{n-1}, t_n \\ A_1, \dots, A_{n-1}, j \end{array} \right]\right) P\left(\left[ \begin{array}{c} t_{n+1} - t_n, \dots, t_{n+m} - t_n \\ A_{n+1}, \dots, A_{n+m} \end{array} \right]\right). \end{aligned} \quad (1.2)$$

本篇所研究的(准)转概阵  $P(t)$  都是标准的, 以后不再说明.

**定义1.2.** 设  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  是任一概率空间,  $E$  为可数集,  $\mathbf{T} = [0, \infty)$  为时间参数集,  $\{X_t; t \in \mathbf{T}\}$  是一族定义在  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  取值于  $E$  的随机变量, 如果对任意的  $n \geq 2, 0 \leq t_1 < \dots < t_n$ , 及任意的  $i_1, \dots, i_n \in E$ , 均有

$$\begin{aligned} P(X_{t_n} = i_n | X_{t_1} = i_1, \dots, X_{t_{n-1}} = i_{n-1}) \\ = P(X_{t_n} = i_n | X_{t_{n-1}} = i_{n-1}), \end{aligned} \quad (1.3)$$

(当 (1.3) 左边有意义时), 则称  $\{X_t; t \in \mathbf{T}\}$  是一个连续时间的可数状态的马尔可夫过程, 简称可数状态的马尔可夫过程.  $E$  称为其状态空间. 如果存在一个转概阵  $P(t) = (p_{ij}(t), i, j \in E)$  使

$$P(X_{s+t} = j | X_s = i) = p_{ij}(t), (i, j \in E, s, t \in \mathbf{T}),$$

(当左边有意义时), 则称  $\{X_t; t \in \mathbf{T}\}$  是具有时齐的转移概率的可数状态的马尔可夫过程, 简称可数状态的时齐的马尔可夫过程. 本篇所研究的, 都是这类马尔可夫过程.  $P(t)$  称为  $\{X_t; t \in \mathbf{T}\}$  的转概阵,  $\{P(X_0 = i), i \in E\}$  称为其初始分布.

**定理1.1.** (存在性定理) 设  $E$  为可数集,  $\mathbf{T} = [0, \infty)$ ,  $P(t) = (p_{ij}(t), i, j \in E)$  是转概阵,  $\{\mu_i, i \in E\}$  是一个概率分

布, 则恒存在一个概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  及定义在其上的以  $E$  为状态空间的以  $P(t)$  为转概阵的以  $\{\mu_i, i \in E\}$  为初始分布的时齐的马尔可夫过程  $\{X_t; t \in \mathbf{T}\}$ .

证明仿第一篇定理 1.1.

若  $(\Omega, \mathcal{F}, X_t, \theta_t, P^i), (i \in E, t \in \mathbf{T})$  是一个  $P$  过程, 则对任何  $i \in E, \{X_t; t \in \mathbf{T}\}$  是概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, P^i)$  上的以  $P(t)$  为转概阵的初始分布集中在  $i$  的可数状态的时齐的马尔可夫过程. 故  $P$  过程实给出一族可数态状的时齐的马尔可夫过程.

## § 2. 有限维的转概阵的分析理论

设  $P(t) = (p_{i,j}(t), i, j \in E) (0 \leq t < \infty)$  是一个有限维 (即  $E$  为有限集) 的转概阵. 在这一节中, 我们将要研究  $P(t)$  对  $t$  的连续性、可微性及其逆问题、当  $t \rightarrow \infty$  时  $P(t)$  的极限的存在性问题及此极限的性质, 等等.

**引理 2.1.** 设  $A(t) = (a_{i,j}(t), i, j \in E)$  是一个有限维的方阵,  $(0 \leq t < \infty)$ , 而且满足:

- (1)  $A(s+t) = A(s)A(t), (0 \leq s, t < \infty);$
- (2)  $\lim_{t \rightarrow 0+} A(t) = A(0) = I,$

其中  $I$  为单位矩阵. 则

- (i)  $A(t)$  对  $t$  连续,  $(0 \leq t < \infty);$
- (ii)  $A'(0) \equiv \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{1}{t} (A(t) - I)$  存在, 记之为  $B;$
- (iii)  $A'(t) = BA(t) = A(t)B, (0 \leq t < \infty);$
- (iv)  $A(t) = e^{Bt};$

对任一矩阵  $M$  来说, 我们定义  $e^M = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} M^k.$

**证** (i) 因为  $A(s+t) = A(t)A(s), (0 \leq s, t < \infty)$ , 所以由

$\lim_{s \rightarrow 0+} A(s) = I$  得  $\lim_{s \rightarrow 0+} A(s+t) = A(t)$ 。今设  $0 < s < t < \infty$ ，则由  $A(t) = A(t-s)A(s)$  及  $s$  充分小时  $A(s)$  为非退化矩阵（因为  $\lim_{s \rightarrow 0+} A(s) = I$ ）得知： $A(t-s) = A(t)A(s)^{-1}$ 。（对任一矩阵  $M$  来说， $M^{-1}$  恒表  $M$  的逆矩阵。）所以，由  $\lim_{s \rightarrow 0+} A(s)^{-1} = I^{-1} = I$  得  $\lim_{s \rightarrow 0+} A(t-s) = A(t)$ 。综上所述，当  $0 < t < \infty$  时  $A(t)$  对  $t$  连续，而  $A(t)$  在  $t=0$  右连续乃是假设，故 (i) 得证。

(ii) 令

$$\mathcal{M} = \left\{ M \mid \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{A(t) - I}{t} M \text{ 存在且此矩阵的元素为有限数} \right\}.$$

容易证明：对任何  $a > 0$ ，均有

$$\frac{1}{a} \int_0^a A(s) ds \in \mathcal{M}.$$

事实上，当  $0 < t < a < \infty$  时有：

$$\begin{aligned} \frac{A(t) - I}{t} \frac{1}{a} \int_0^a A(s) ds &= \frac{1}{ta} \int_0^a (A(s+t) - A(s)) ds \\ &= \frac{1}{ta} \left[ \int_t^{a+t} A(s) ds - \int_0^a A(s) ds \right] \\ &= \frac{1}{ta} \left[ \int_a^{a+t} A(s) ds - \int_0^t A(s) ds \right]. \end{aligned}$$

令  $t \rightarrow 0+$ ，若注意  $A(s)$  对  $s$  的连续性再利用中值定理即得：

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{A(t) - I}{t} \frac{1}{a} \int_0^a A(s) ds = \frac{1}{a} (A(a) - I).$$

所以

$$\frac{1}{a} \int_0^a A(s) ds \in \mathcal{M}.$$

又因为  $\mathcal{M}$  是一个线性体系，故是闭的，因此

$$\lim_{s \rightarrow 0+} \frac{1}{s} \int_0^s A(s) ds \in \mathcal{M}.$$

此即

$$I = \lim_{s \rightarrow 0+} A(s) = \lim_{s \rightarrow 0+} \frac{1}{s} \int_0^s A(s) ds \in \mathcal{M}.$$

亦即

$$\lim_{s \rightarrow 0+} \frac{A(t) - I}{t}$$

存在 (记此极限为  $B$ ) 且其元素为有限数. (ii) 证毕.

(iii) 因为

$$\frac{A(t+s) - A(t)}{s} = \frac{(A(s) - I)A(t)}{s}, \quad (0 < s, < \infty,$$

$0 \leq t < \infty),$

$$\frac{A(t) - A(t-s)}{s} = \frac{(A(s) - I)A(t-s)}{s}, \quad (0 < s < t < \infty),$$

所以, 令  $s \rightarrow 0+$  并注意 (ii) 即得:

$$A'(t) = A(t)B = BA(t), \quad (0 \leq t < \infty). \text{ (iii) 得证.}$$

(iv) 由于  $A(t)$  满足

$$\begin{cases} A'(t) = BA(t), & 0 \leq t < \infty, \\ A(0) = I, \end{cases}$$

解此常系数的线性微分方程组立即可得  $A(t) = e^{Bt}$ .

定义 2.1. 称方阵

$$Q = \begin{pmatrix} q_{1,1}, & \dots, & q_{1,N} \\ \dots & \dots & \dots \\ q_{N,1}, & \dots, & q_{N,N} \end{pmatrix}$$

为转移强度矩阵 (简称转强阵), 如果它满足:  $q_{i,i} \leq 0, (1 \leq i \leq N),$

$q_{i,j} \geq 0, (1 \leq i, j \leq N, i \neq j), \sum_{j=1}^N q_{i,j} \leq 0, (1 \leq i \leq N).$  特别地,

若  $\sum_{j=1}^N q_{i,j} = 0, (1 \leq i \leq N)$ , 则称此转强阵是保守的。

**定理2.1.** 设  $P(t)$  是一个有限维的转概阵。

则有

$$(i) \quad P'(0) \equiv \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{1}{t} (P(t) - I)$$

存在, 记此极限为  $Q$ ,  $Q$  是保守的转强阵;

$$(ii) \quad P'(t) = QP(t) - P(t)Q, (0 \leq t < \infty);$$

$$(iii) \quad P(t) = e^{Qt}, (0 \leq t < \infty).$$

反之, 任给一个保守的转强阵  $Q$ , 则  $P(t) \equiv e^{Qt}$  是转概阵。

**证** 由引理2.1立即得到 (i), (ii), (iii). 现在我们来证明最后这条论断。设  $Q$  是一个保守的转强阵,  $P(t) \equiv e^{Qt}$ . 显然  $P(t)$  满足:  $P(t)1 = 1, (0 \leq t < \infty)$ ,  $P(s+t) = P(s)P(t), (0 \leq s, t < \infty)$ ,  $P(0) = \lim_{t \rightarrow 0+} P(t) = I$ . 最后我们证明  $P(t) \geq 0, (0 \leq t < \infty)$ .

(1) 先设对一切  $1 \leq i, j \leq N, i \neq j$ , 均有  $q_{i,j} > 0$ . 则由  $P(t) = e^{Qt} = I + Qt + \frac{1}{2!}(Qt)^2 + \dots$  得知: 存在  $\delta > 0$ , 使得  $0 \leq t \leq \delta$  时有  $P(t) > 0$ . 因此, 若能证明

$$P(t) > 0, (0 \leq t \leq a) \implies P(t) > 0, (0 \leq t \leq 2a),$$

则  $P(t) > 0, (0 \leq t < \infty)$ . 事实上, 由  $P(t) = P(a)P(t-a) (a \leq t \leq 2a)$  立得此关系。

(2) 取消(1)中对  $Q$  的假定来证明  $P(t) \geq 0 (0 \leq t < \infty)$ . 作

$$Q_n = \begin{pmatrix} q_{1,1} - \frac{N-1}{n}, q_{1,2} + \frac{1}{n}, \dots, q_{1,N} + \frac{1}{n} \\ q_{2,1} + \frac{1}{n}, q_{2,2} - \frac{N-1}{n}, \dots, q_{2,N} + \frac{1}{n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{N,1} + \frac{1}{n}, q_{N,2} + \frac{1}{n}, \dots, q_{N,N} - \frac{N-1}{n} \end{pmatrix},$$

显然,  $Q_n$  是一个保守的转强阵, 所以由(1)得知  $P_n(t) \equiv e^{Q_n t} \geq 0$ ,  $(0 \leq t < \infty)$ . 但是  $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = Q$ , 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(t) = P(t)$ . 因此  $P(t) \geq 0$ ,  $(0 \leq t < \infty)$ . 至此, 定理2.1得证.

**定理2.2.** 设  $P(t)$  是一个有限维的转概阵,  $Q = P'(0)$ , 则

(i)  $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t)$  存在, 记此极限为  $\Pi$ ;

(ii)  $P(t)\Pi = \Pi P(t) = \Pi^2 = \Pi$ ,  $(t \geq 0)$ ;

(iii)  $\Pi \geq 0$ ,  $\Pi \mathbf{1} = \mathbf{1}$ ;

(iv)  $\Pi Q = Q\Pi = 0$ ;

(v)  $\Pi = \mathbf{1}\pi'$ ,  $\pi' > 0 \iff$  存在一个  $t_0 > 0$ , 使  $P(t_0) > 0$ ;

(vi)  $\Pi = \mathbf{1}\Pi' \iff x'Q = 0, (x' \geq 0, x' \in (I))$  的通解为  $c\bar{x}'$ , 其中  $c$  为任一非负实数,  $\bar{x}' \neq 0$ .

这时  $\pi' = c\bar{x}' / c\bar{x}'\mathbf{1}$ .

**证** 关于 (i) 和 (ii) 我们将要在 § 3 定理3.2中对更一般的情形来证明.

(iii) 由于  $P(t) \geq 0, P(t)\mathbf{1} = \mathbf{1}$ ,  $P(t)$  是有限维矩阵, 所以  $\Pi \geq 0, \Pi\mathbf{1} = \mathbf{1}$ .

(iv) 由(ii)有

$$\frac{P(t) - \Pi}{t} \Pi = \Pi \frac{P(t) - \Pi}{t} = 0, \quad (t > 0),$$

令  $t \rightarrow 0+$ , 即得:

$$Q\Pi = \Pi Q = 0.$$

(v) “ $\implies$ ” 设  $\Pi > 0$ , 由

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \Pi$$

及  $P(t)$  是有限维矩阵得知: 存在一个  $t_0 > 0$ , 使得  $t \geq t_0$  时有

$$P(t) > 0, \quad (t \geq t_0).$$

“ $\impliedby$ ” 设存在一个  $t_0 > 0$ , 使  $P(t_0) > 0$ . 由

$$\Pi = \lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} P(kt_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} P(t_0)^k$$

及第一篇命题5.4得知:

$$\Pi = \mathbf{1}\pi', \pi' > 0.$$

(vi) “ $\Leftarrow$ ” 设  $x'Q=0$  的通解为  $c\bar{x}'$ . 由 (iv) 有  $\Pi Q=0$ , 任取其一行, 即用  $e_i'$  左乘两边得:

$$\pi_i'Q=0, \pi_i' \geq 0, \pi_i'\mathbf{1}=1,$$

所以

$$\pi_i' = c_i \bar{x}',$$

但是  $\pi_i'\mathbf{1}=1$ , 即是  $c_i\bar{x}'\mathbf{1}=1$ , 而  $\bar{x}'\mathbf{1} \neq 0$ , 所以  $c_i$  不依赖于  $i$ , 此即  $\Pi$  的行行一样, 亦即  $\Pi = \mathbf{1}\pi'$ .

“ $\Rightarrow$ ” 设  $\Pi = \mathbf{1}\pi'$ , (自然有  $\pi' > 0, \pi'\mathbf{1}=1$ ), 而且  $x'Q=0, x' \geq 0, x' \in (I)$ . 往证  $x' = c\pi'$ . 事实上, 由定理2.1 有

$$P(t) = e^{Qt} = \mathbf{I} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(Qt)^k}{k!},$$

所以

$$x'P(t) = x' + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x'(Qt)^k}{k!} = x'.$$

令  $t \rightarrow \infty$ , 并注意 (i), 再利用控制收敛定理得:

$$x' - x'\Pi = x'\mathbf{1}x'.$$

取  $c = x'\mathbf{1}$  即可.

### § 3. 转概阵的分析理论

在 § 2 中, 我们研究了有限维转概阵  $P(t) = (p_{i,j}(t), i, j \in E)$  ( $E$  是有限集) 的分析性质. 在这一节中, 我们将要研究一般的转概阵  $P(t)$  的分析性质, 这时  $E$  是一个可数集.

**定理3.1.** 设  $P(t) = (p_{i,j}(t), i, j \in E)$  是一个转概阵. 则对任何  $i \in E, J \subset E, 0 \leq s, t < \infty$ , 有

$$|p_{i,J}(t) - p_{i,J}(s)| \leq 1 - p_{i,i}(|t-s|), \quad (3.1)$$

其中  $p_{i,J}(t) = \sum_{j \in J} p_{i,j}(t)$ . 因此,  $p_{i,J}(t)$  对  $t$  来说在  $[0, \infty)$  上一



致连续, 而且对  $J$  来说是等度连续的. 特别地,  $p_{i,j}(t)$  在  $t \in [0, \infty)$  上一致连续, 而且对  $i$  来说是等度连续的.

**证** 不失普遍性可以假设  $0 \leq s < t$ . 由  $(K-c)$  方程式有:

$$p_{i,j}(t) \geq p_{i,i}(t-s)p_{i,j}(s),$$

所以

$$p_{i,j}(t) - p_{i,j}(s) \geq (p_{i,i}(t-s) - 1)p_{i,j}(s) \geq p_{i,i}(t-s) - 1. \quad (3.2)$$

由于 (3.2) 对任何  $J \subset E$  均成立, 特别地对  $\bar{J} \equiv E \setminus J$  也成立. 即是有

$$p_{i,\bar{J}}(t) - p_{i,\bar{J}}(s) \geq p_{i,i}(t-s) - 1.$$

亦即

$$p_{i,j}(s) - p_{i,j}(t) \geq p_{i,i}(t-s) - 1. \quad (3.3)$$

由 (3.2) 及 (3.3) 立即得到 (3.1).

**定理 3.2.** 设  $P(t)$  是一个转概阵, 则

(i)  $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t)$  存在, 记此极限为  $\Pi$ ;

(ii)  $\Pi P(t) = P(t)\Pi = \Pi^2 = \Pi$ ,  $(0 \leq t < \infty)$ .

**证** (i) 由  $(K-c)$  方程式有

$$p_{i,i}(t) \geq \left(p_{i,i}\left(\frac{t}{2}\right)\right)^2 \geq \cdots \geq \left(p_{i,i}\left(\frac{t}{2^n}\right)\right)^{2^n},$$

$$\left(i \in E \atop 0 \leq t < \infty\right).$$

但是  $\lim_{t \rightarrow 0^+} p_{i,i}(t) = 1$ , 所以

$$p_{i,i}(t) > 0, \quad (0 \leq t < \infty, i \in E). \quad (3.4)$$

任意固定一对  $i, j$ , 简记  $f(t) = p_{i,j}(t)$ , 往证  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  存在. 为此

只须证明对任何一串  $t_n \uparrow \infty$ , 均有  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n)$  存在. 事实上, 由

(3.4) 得知对任何一个固定的  $\tau > 0$ , 有  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(n\tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} (P(\tau))^n$  存

在. 由定理 3.1 得知  $f(t)$  在  $t \in [0, \infty)$  上一致连续, 所以任意给定一个  $\varepsilon > 0$ , 必存在  $\tau > 0$ , 使

$$|f(t) - f(s)| \leq \varepsilon, \quad (|t - s| < \tau). \quad (3.5)$$

对每个  $n$ , 可取非负整数  $k_n$ , 使

$$k_n\tau \leq t_n < (k_n+1)\tau.$$

所以, 由(3.5)得

$$f(k_n\tau) - \varepsilon \leq f(t_n) \leq f(k_n\tau) + \varepsilon, \quad (n=1, 2, \dots),$$

但是  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(k_n\tau)$  存在, 记此极限为  $l$ 。因此

$$l - \varepsilon \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(t_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} f(t_n) \leq l + \varepsilon.$$

由  $\varepsilon$  的任意性得知  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n)$  存在。

(ii) 由 (i) 及  $P(s+t) = P(t)P(s)$  并用控制收敛定理得  $\Pi = P(t)\Pi$ 。

仿上, 利用  $P(s+t) = P(s)P(t)$  及法都引理, 令  $s \rightarrow \infty$  即得:

$$\Pi \geq \Pi P(t), \quad (0 \leq t < \infty).$$

但是  $(\Pi P(t))1 = \Pi(P(t)1) = \Pi 1$ , 所以

$$\Pi = \Pi P(t).$$

把上式对  $t \rightarrow \infty$  取极限, 并利用控制收敛定理即得  $\Pi = \Pi^2$ 。

**引理3.1.** 若广义实值函数  $f(t)$  ( $t \geq 0$ ) 满足

$$(1) \quad f(u+v) \leq f(u) + f(v), \quad (u, v \geq 0);$$

$$(2) \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = 0,$$

则

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t} = \sup_{t > 0} \frac{f(t)}{t}. \quad (3.7)$$

**证** 令  $\eta(u) = \sup_{0 \leq t \leq u} f(t)$ 。任取  $t > 0$ , 则对任何  $u \in (0, t)$  来说, 均有正整数  $n$ , 使得:

$$nu < t \leq (n+1)u. \quad (3.8)$$

反复地利用(1)及(3.8)得:

$$f(t) \leq f(t - nu) + f(nu) \leq nf(u) + \eta(u),$$

所以

$$\frac{f(t)}{t} \leq \frac{\eta(u)}{t} + \frac{n}{t}f(u). \quad (3.9)$$

令  $u \rightarrow 0^+$  得:

$$\frac{f(t)}{t} \leq \lim_{u \rightarrow 0^+} \inf \frac{f(u)}{u}.$$

故

$$\sup_{t > 0} \frac{f(t)}{t} \leq \lim_{u \rightarrow 0^+} \inf \frac{f(u)}{u}.$$

因此

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t} = \sup_{t > 0} \frac{f(t)}{t}.$$

**定理3.3.** 对任何转移阵  $P(t)$  来说, 恒有

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - p_{i,i}(t)}{t}$$

存在, 记此极限为  $q_i$ , 则还有  $0 \leq q_i \leq \infty, p_{i,i}(t) \geq e^{-q_i t}, (i \in E, t \geq 0)$ .

**证** 在定理3.2中已证  $p_{i,i}(t) > 0, (i \in E, t \geq 0)$ 。所以可以令  $f(t) = -\log p_{i,i}(t)$ 。由于  $\lim_{t \rightarrow 0^+} p_{i,i}(t) = 1$  及  $p_{i,i}(s+t) \geq p_{i,i}(s)p_{i,i}(t), (i \in E, s \geq 0, t \geq 0)$ , 所以  $f(t)$  满足引理3.1中的条件。因此

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t} = \sup_{t > 0} \frac{f(t)}{t}.$$

令  $q_i = \sup_{t > 0} \frac{f(t)}{t}$ , 则  $f(t) = q_i t + o(t), (t \rightarrow 0^+)$ , 而且  $f(t) \leq q_i t, (t \geq 0)$ 。所以

$$p_{i,i}(t) = e^{-q_i t + o(t)} = e^{-q_i t}(1 + o(t)) = e^{-q_i t} + o(t), (t \rightarrow 0^+).$$

因此,

$$\frac{1 - p_{i,i}(t)}{t} = \frac{1 - e^{-q_i t}}{t} + o(1), (t \rightarrow 0^+),$$

此即

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - p_{i,i}(t)}{t} = q_i,$$

存在。由  $f(t) \leq q_i t$  直接得到  $p_{i,i}(t) \geq e^{-q_i t}$ , ( $t \geq 0$ ).

系1. 若  $q_i = 0$ , 则  $p_{i,i}(t) \equiv 1$ .

引理3.2. 设  $P(t)$  是一个转概率阵, 令

$$\mathcal{M} = \{J \mid J \subset E, \lim_{t \rightarrow 0^+} \sup_{j \in J} (1 - p_{i,j}(t)) = 0\},$$

$$p_{i,J}(t) = \sum_{j \in J} p_{i,j}(t).$$

任给  $J \in \mathcal{M}$ ,  $\varepsilon < \frac{1}{4}$ , 如果  $\tau > 0$  满足:

$$1 - p_{i,j}(t) < \varepsilon, \quad (0 \leq t \leq \tau, j \in J),$$

则对一切  $0 < v \leq \tau$ ,  $0 < \frac{u}{v} \leq \varepsilon$ ,  $K \subset J$ ,  $i \in J \setminus K$ , 有

$$(1 - 4\varepsilon) \frac{p_{i,K}(u)}{u} \leq \frac{p_{i,K}(v)}{v}. \quad (3.10)$$

证 令  $f_1(i, G) = p_{i,G}(u)$ , ( $i \in E$ ,  $G \subset E$ ),  $f_{m+1}(i, G) = \sum_{j \in K} f_m(i, \{j\}) p_{i,G}(u)$ , ( $m \geq 1$ ). 显然, 固定  $i$  和  $m$  时,  $f_m(i, \cdot)$

有完全可加性。下面我们对  $m$  作归纳法来证明:

$$\begin{aligned} p_{i,G}(t) &= \sum_{l=1}^m \sum_{j \in K} f_l(i, \{j\}) p_{i,G}(t - lu) \\ &\quad + \sum_{j \in K} f_m(i, \{j\}) p_{i,G}(t - mu), \\ &\quad \left( \begin{array}{l} G \subset E, m \geq 1, \\ t \geq mu, \end{array} \right). \end{aligned} \quad (3.11)$$

当  $m=1$  时, (3.11) 右边等于

$$\sum_{j \in E} f_1(i, \{j\}) p_{i,G}(t - u)$$

$$= \sum_{i \in E} p_{i,j}(u) p_{j,G}(t - u) = p_{i,G}(t).$$

若(3.11)对 $m$ 成立, 则

$$\begin{aligned} p_{i,G}(t) &= \sum_{l=1}^{m+1} \sum_{j \in K} f_l(i, \{j\}) p_{j,G}(t - lu) \\ &\quad + \sum_{j \in K} f_{m+1}(i, \{j\}) p_{j,G}(t - (m+1)u) \\ &\quad + \sum_{j \in K} f_m(i, \{j\}) p_{j,G}(t - mu) \\ &\quad - \sum_{j \in E} f_{m+1}(i, \{j\}) p_{j,G}(t - (m+1)u) \\ &= \sum_{l=1}^{m+1} \sum_{j \in K} f_l(i, \{j\}) p_{j,G}(t - lu) \\ &\quad + \sum_{j \in K} f_{m+1}(i, \{j\}) p_{j,G}(t - (m+1)u) \\ &\quad + \sum_{j \in K} f_m(i, \{j\}) p_{j,G}(t - mu) \\ &\quad - \sum_{j \in E} \sum_{k \in K} f_m(i, \{k\}) p_{k,j}(u) p_{j,G}(t - (m+1)u) \\ &= \sum_{l=1}^{m+1} \sum_{j \in K} f_l(i, \{j\}) p_{j,G}(t - lu) \\ &\quad + \sum_{j \in K} f_{m+1}(i, \{j\}) p_{j,G}(t - (m+1)u). \end{aligned}$$

这就证明了(3.11)。现在我们反复利用(3.11)来证明引理3.2。

(i) 在(3.11)中令 $G=K$ ,  $t=v$ ,  $m=n_0$ , (其中 $n_0 = \left[ \frac{u}{v} \right]^{(1)}$ )

得:

$$p_{i,K}(v) \geq \sum_{l=1}^{n_1} \sum_{j \in K} f_l(i, \{j\}) p_{j,K}(v - lu)$$

1)  $[x]$ 表 $x$ 的最大整数部份, 即不大于 $x$ 的最大整数。

$$\begin{aligned}
&\geq \sum_{l=1}^{n_0} \sum_{j \in K} f_l(i, \{j\}) p_{l,j}(v-lu) \\
&\geq \sum_{l=1}^{n_0} f_l(i, K)(1-\varepsilon).
\end{aligned}$$

所以

$$\sum_{l=1}^{n_0} f_l(i, K) \leq \frac{p_{i,K}(v)}{1-\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}. \quad (3.12)$$

(ii) 在(3.11)中令  $G = \{i\}$ ,  $t = mu$  ( $1 \leq m \leq n_0 - 1$ ) 得

$$p_{i,\{i\}}(mu) \leq \sum_{l=1}^{m-1} f_l(i, K) + f_m(i, \{i\}), \quad (3.13)$$

但是, 由  $1 \leq m \leq n_0 - 1$  得知

$$p_{i,\{i\}}(mu) > 1 - \varepsilon, \quad (3.14)$$

所以, 由(3.12), (3.13), (3.14)得:

$$f_m(i, \{i\}) > (1-\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} > \frac{1-3\varepsilon}{1-\varepsilon}, \quad (1 \leq m \leq n_0 - 1). \quad (3.15)$$

(iii) 在(3.11)中令  $G = K$ ,  $m = n_0$ ,  $t = v$ , 则得:

$$\begin{aligned}
p_{i,K}(v) &\geq \sum_{l=1}^{n_0} \sum_{j \in K} f_l(i, \{j\}) p_{l,j}(v-lu) \\
&\geq (1-\varepsilon) \sum_{j \in K} f_1(i, \{j\}) \\
&\quad + \sum_{l=2}^{n_0} \sum_{j \in K} f_l(i, \{j\}) p_{l,j}(v-lu) \\
&= (1-\varepsilon) p_{i,K}(u) + \sum_{l=2}^{n_0} \sum_{j \in K} f_l(i, \{j\}) p_{l,j}(v-lu) \\
&\geq (1-\varepsilon) p_{i,K}(u) \\
&\quad + \sum_{l=2}^{n_0} \sum_{j \in K} f_{l-1}(i, \{i\}) p_{l-1,j}(u) p_{l,j}(v-lu).
\end{aligned}$$

因此由(3.15)及引理的假设得:

$$\begin{aligned} p_{i,K}(v) &\geq (1-\varepsilon)p_{i,K}(u) + \sum_{l=2}^{n_0} \frac{1-3\varepsilon}{1-\varepsilon} (1-\varepsilon) \sum_{l \in K} p_{i,l}(u) \\ &= (1-\varepsilon)p_{i,K}(u) + (n_0-1)(1-3\varepsilon)p_{i,K}(u). \end{aligned}$$

所以

$$\frac{p_{i,K}(v)}{v} \geq (1-3\varepsilon) \frac{n_0 u}{v} \frac{p_{i,K}(u)}{u},$$

但是

$$\frac{n_0 u}{v} \equiv \left[ \frac{v}{u} \right] \frac{u}{v} \geq 1 - \frac{u}{v} \geq 1 - \varepsilon,$$

所以

$$(1-4\varepsilon) \frac{p_{i,K}(u)}{u} \leq \frac{p_{i,K}(v)}{v}.$$

**定理3.4.** 设 $P(t)$ 是一个转概率阵。任意固定 $i \in E$ ,  $J \in \mathcal{A}$ ,  $i \notin J$ , 均有

(i) 当 $K \subset J$ 时,  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} p_{i,K}(t)$  存在, 记此极限为 $q_{i,K}$ 则  $0 \leq$

$q_{i,K} < \infty$ , 而且此极限对 $K \subset J$ 是一致地成立。

(ii)  $q_{i,K}$  对于 $K \subset J$ 来说, 具有完全可加性。

**证** (i) 令 $G = \{i\} \cup J$ , 则 $G \in \mathcal{A}$ , 所以对任何 $\varepsilon < \frac{1}{4}$ , 必存在一个 $\tau = \tau(\varepsilon, G)$ , 使

$$1 - p_{j,j}(t) < \varepsilon, \quad (0 \leq t \leq \tau, j \in G)$$

所以, 由引理3.2得:

$$(1-4\varepsilon) \frac{p_{i,K}(u)}{u} \leq \frac{p_{i,K}(v)}{v}, \quad \left( \text{只要 } 0 < v \leq \tau, 0 < \frac{u}{v} \leq \varepsilon \right),$$

在上式中令 $u \rightarrow 0^+$ 取上极限得:

$$(1-4\varepsilon) \limsup_{u \rightarrow 0^+} \frac{p_{i,K}(u)}{u} \leq \frac{p_{i,K}(v)}{v}, \quad (0 < v \leq \tau),$$

(3.16)

所以, 再把(3.16)对 $v \rightarrow 0^+$ 取下极限并注意 $\varepsilon$ 的任意性得知

$$\lim_{v \rightarrow 0^+} \frac{p_{i,K}(v)}{v}$$

存在, 而且若记此极限为 $q_{i,K}$ , 就有 $0 \leq q_{i,K} < \infty$ . 因此(3.16)化为

$$(1 - 4\varepsilon)q_{i,K} \leq \frac{p_{i,K}(v)}{v}, \quad (0 < v \leq \tau). \quad (3.17)$$

显然,  $q_{i,K} \leq q_{i,J}$ , 所以

$$\frac{p_{i,K}(v)}{v} - q_{i,K} \geq -4\varepsilon q_{i,J}, \quad (0 < v \leq \tau). \quad (3.18)$$

但是 $K$ 可以为 $J$ 的任意子集。所以在(3.18)中以 $J \setminus K$ 代 $K$ 得:

$$\frac{p_{i,J}(v) - p_{i,K}(v)}{v} - (q_{i,J} - q_{i,K}) \geq -4\varepsilon q_{i,J}, \quad (0 < v \leq \tau).$$

即是

$$\frac{p_{i,K}(v)}{v} - q_{i,K} \leq \left( \frac{p_{i,J}(v)}{v} - q_{i,J} \right) + 4\varepsilon q_{i,J}, \quad (0 < v \leq \tau). \quad (3.19)$$

由(3.18)和(3.19)得:

$$\left| \frac{p_{i,K}(v)}{v} - q_{i,K} \right| \leq 4\varepsilon q_{i,J} + \left| \frac{p_{i,J}(v)}{v} - q_{i,J} \right|, \quad (0 < v \leq \tau). \quad (3.20)$$

(3.20)说明了

$$\lim_{v \rightarrow 0^+} \frac{p_{i,K}(v)}{v} = q_{i,K}, \quad (\text{对 } K \subset J \text{ 一致地成立}).$$

(ii) 显然,  $q_{i,K}$ 对于 $K \subset J$ 来说有有限可加性。若注意(3.17), 则对 $K_n \subset J$ ,  $K_n \downarrow \emptyset$ 来说, 还有

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} q_{i,K_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \varepsilon} \frac{p_{i,K_n}(v)}{v} = 0.$$

所以 $q_{i,K}$ 对 $K \subset J$ 来说, 有完全可加性。

系1. 若 $i \neq j$ , 则

$$(i) \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} p_{i,j}(t) \text{ 存在, 记此极限为 } q_{i,j}, \text{ 这时 } 0 \leq q_{i,j} < \infty;$$



(ii)  $\sum_{j \neq i} q_{i,j} \leq q_i$ , 其中  $q_i$  的定义见定理 3.3.

证 (i) 可以从定理 3.4 立即得到。

(ii) 取  $E$  中一串单调上升到  $E$  的子集  $J_n$ , 而且取得  $J_n$  中恰有  $n$  个元素。由于

$$\frac{p_{i,i}(t) - 1}{t} + \sum_{\substack{j \in J_n \\ j \neq i}} \frac{p_{i,j}(t)}{t} \leq 0.$$

所以, 令  $t \rightarrow 0^+$  即得:

$$-q_i + \sum_{\substack{j \in J_n \\ j \neq i}} q_{i,j} \leq 0.$$

令  $n \rightarrow \infty$  得:  $\sum_{j \neq i} q_{i,j} \leq q_i$ .

定理 3.5. 下列二条件等价:

(i)  $\sup_{i \in E} q_i < \infty$ ,

(ii)  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \sup_{i \in E} (1 - p_{i,i}(t)) = 0$ .

若其中有一个条件满足, 则

$$q_i = \sum_{j \neq i} q_{i,j}, \quad (i \in E),$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - p_{i,i}(t)}{t} = q_i \text{ 对 } i \in E \text{ 一致地成立.}$$

证 (i)  $\Rightarrow$  (ii). 设 (i) 成立. 令  $c = \sup_{i \in E} q_i < \infty$ . 由定理 3.3 有

$p_{i,i}(t) \geq e^{-q_i t}$ . 所以

$$1 - p_{i,i}(t) \leq q_i t \leq ct.$$

令  $t \rightarrow 0^+$  即得 (ii).

(ii)  $\Rightarrow$  (i). 设 (ii) 成立. 取  $K = E \setminus \{i\}$ . 由定理 3.4 知

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{p_{i,K}(t)}{t} = q_{i,K} \quad (3.21)$$

存在,  $0 \leq q_{i,K} < \infty$ . 此即

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - p_{i,j}(t)}{t} = q_{i,K}. \quad (3.22)$$

用定理3.4的(ii)有

$$q_{i,K} = \sum_{j \in K} q_{i,j} = \sum_{j \neq i} q_{i,j}.$$

但是, 由定理3.3有

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - p_{i,i}(t)}{t} = q_i,$$

所以  $q_i = \sum_{j \neq i} q_{i,j} < \infty$ .

由于(ii)成立, 所以 $E$ 的任何子集必属于引理3.2中的 $\mathcal{M}$ , 而且任给  $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$ , 必存在一个  $\tau = \tau(\varepsilon) > 0$  使得

$$1 - p_{i,j}(t) < \varepsilon, \quad (0 \leq t \leq \tau, j \in E).$$

因此, 由引理3.2得知:

$$(1 - 4\varepsilon) \frac{p_{i,K}(u)}{u} \leq \frac{p_{i,K}(v)}{v}, \quad (0 < v \leq \tau, 0 < \frac{u}{v} \leq \varepsilon),$$

令  $u \rightarrow 0^+$  并注意(3.21)得

$$(1 - 4\varepsilon) q_{i,K} \leq \frac{p_{i,K}(v)}{v}, \quad (0 < v \leq \tau) \quad (3.23)$$

所以  $\sup_{i \in E} q_i = \sup_{i \in E} q_{i,K} \leq \frac{1}{(1 - 4\varepsilon)\tau} < \infty$ . (i)成立.

又因为

$$p_{i,i}(t) \geq e^{-q_i t},$$

所以  $q_i - \frac{1 - p_{i,i}(t)}{t} \geq 0$ .

但是, 由(3.23)还有

$$q_i - \frac{1 - p_{i,i}(t)}{t} \leq 4\varepsilon q_i < \frac{4\varepsilon}{(1 - 4\varepsilon)\tau}, \quad (0 < t \leq \tau).$$

由于 $\varepsilon$ 可以任意小, 所以

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - p_{i,i}(t)}{t} = q_i, \quad (\text{对 } i \in E \text{ 一致地成立}).$$

**定理3.6.** 设  $P(t)$  是一个转概率阵。 $q_i, q_{i,j}$  的意义如前。记  $q_{i,i} = -q_i$ 。固定任意一个  $i \in E$ 。若  $0 \leq q_i < \infty$ ，则  $p_{i,j}(t)$  在  $(0, \infty)$  上有连续导数  $p'_{i,j}(t)$ ，而且它满足：

$$(i) \quad \sum_{j \in E} |p'_{i,j}(t)| \leq 2q_i, \quad (t \geq 0),$$

$$(ii) \quad \sum_{j \in E} p'_{i,j}(t) = 0, \quad (t > 0);$$

$$(iii) \quad p'_{i,j}(s+t) = \sum_{k \in E} p'_{i,k}(t) p_{k,j}(s), \quad (t > 0, s \geq 0),$$

$$(iv) \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} p'_{i,j}(t) = p'_{i,j}(0) = q_{i,j};$$

$$(v) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} p'_{i,j}(t) = 0.$$

**注意：**若  $q_i = 0$ ，则  $p_{i,i}(t) = 1$ ， $p_{i,j}(t) \equiv 0$ ，( $i \neq j$ )，所以定理3.6中的全部结论显然成立。故以下恒设  $0 < q_i < \infty$ 。在证明定理3.6以前我们证明一些引理。

**引理3.3.**  $e^{q_i t} p_{i,j}(t)$  对  $t$  来说单调非降。

**证** 任取  $s \geq 0, t \geq 0$ 。利用  $(K-c)$  方程式和  $p_{i,i}(s) \geq e^{-q_i s}$  即得：

$$e^{q_i (s+t)} p_{i,j}(s+t) \geq e^{q_i (s+t)} p_{i,i}(s) p_{i,j}(t) \geq e^{q_i t} p_{i,j}(t).$$

**引理3.4.** 设  $f(x, y)$  是一个二元的实变实值函数，固定  $y$ ， $f(\cdot, y)$  是  $x$  的勒贝格可测函数，固定  $x$ ， $f(x, \cdot)$  是  $y$  的右连续函数，则  $f(x, y)$  是  $(x, y)$  的二元勒贝格可测函数。

**证** 记  $\chi_A$  是集合  $A$  上的示性函数。取  $A_{n,k} = \left( \frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right]$ ，

$$g_n(x, y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(x, \frac{k+1}{n}\right) \chi_{A_{n,k}}(y) \text{ 则 } g_n \text{ 是 } (x, y) \text{ 的二元勒贝格}$$

可测函数，而且由  $f(x, \cdot)$  的右连续性得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x, y) = f(x, y).$$

所以  $f(x, y)$  是  $(x, y)$  的二元勒贝格可测函数。

**引理3.5.** 在定理3.6的条件下, 存在唯一一组连续函数  $g_{i,j}(t)$ ,  $(t \in [0, \infty))$ , 使得

$$p_{i,j}(t) = e^{-q_i t} \int_0^t q_i e^{q_i s} g_{i,j}(s) ds + e^{-q_i t} \delta_{i,j}, \quad (3.24)$$

其中  $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$  而且还满足:

$$(i) \quad g_{i,j}(t) \geq 0, \quad (t \geq 0), \quad \sum_{j \in E} g_{i,j}(t) \equiv 1, \quad (t > 0);$$

$$(ii) \quad g_{i,j}(s+t) = \sum_{k \in E} g_{i,k}(s) g_{k,j}(t), \quad (s > 0, t \geq 0);$$

$$(iii) \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} g_{i,j}(t) = \begin{cases} 0, & j \neq i, \\ q_{i,i}/q_i, & j = i, \end{cases}$$

$$(iv) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} g_{i,j}(t) = \pi_{i,j}, \quad \text{其中 } \pi_{i,j} = \lim_{t \rightarrow \infty} p_{i,j}(t).$$

**证** 下面分几步来证。

(I) 存在一组函数  $r_{i,j}(t)$ ,  $(t \geq 0)$ , 使得:

$$r_{i,j}(t) \geq 0, \quad \sum_{j \in E} r_{i,j}(t) \equiv 1, \quad (t \geq 0), \quad \text{而且}$$

$$e^{q_i t} p_{i,j}(t) = \int_0^t q_i e^{q_i s} r_{i,j}(s) ds + \delta_{i,j}. \quad (3.25)$$

事实上, 由定理3.1及引理3.3得知: 对任何  $J \subset E$ ,  $e^{q_i t} p_{i,j}(t)$  对  $t$  来说单调非降而且绝对连续。所以存在勒贝格可测函数  $r_{i,j}(t)$  及  $h_{i,j}(t)$  使:

$$e^{q_i t} p_{i,j}(t) = \int_0^t q_i e^{q_i s} r_{i,j}(s) ds + \delta_{i,j}, \quad (3.26)$$

$$e^{q_i t} p_{i, E - \{j\}}(t) = \int_0^t q_i e^{q_i s} h_{i,j}(s) ds + p_{i, E - \{j\}}(0), \quad (3.27)$$

$$r_{i,j} \geq 0, \quad h_{i,j} \geq 0.$$

把上述两式相加得:

$$e^{q_i t} = \int_0^t q_i e^{q_i(s-t)} (r_{i,j}(s) + h_{i,j}(s)) ds + 1$$

所以  $r_{i,j}(s) + h_{i,j}(s) = 1$ , [a.e.]

因此, 由  $r_{i,j}(s) \geq 0$ ,  $h_{i,j}(s) \geq 0$  得:

$$0 \leq r_{i,j}(s) \leq 1. \quad [a.e.]$$

不妨认为  $0 \leq r_{i,j}(s) \leq 1$ , ( $s \geq 0$ )。把(3.26)两边对  $j$  求和得:

$$\sum_{j \in E} r_{i,j}(t) = 1. \quad [a.e.]$$

又不妨认为  $\sum_{j \in E} r_{i,j}(t) = 1$ , ( $t \geq 0$ )。

(II)  $g_{i,j}(t)$  的定义。

以(3.26)代入

$$p_{i,j}(s+t) = \sum_{k \in E} p_{i,k}(s) p_{k,j}(t), \quad (s \geq 0, t \geq 0),$$

得:

$$\begin{aligned} & q_i e^{-q_i(s+t)} \int_0^{s+t} e^{q_i u} r_{i,j}(u) du + e^{-q_i(s+t)} \delta_{i,j} \\ &= \sum_{k \in E} q_i e^{-q_i s} \int_0^s e^{q_i u} r_{i,k}(u) p_{k,j}(t) du + e^{-q_i s} p_{i,j}(t), \end{aligned}$$

再把(3.26)代入上式而得:

$$\begin{aligned} & e^{-q_i s} \int_0^s e^{q_i u} \sum_{k \in E} r_{i,k}(u) p_{k,j}(t) du \\ &= e^{-q_i s} \int_0^s e^{q_i u} r_{i,j}(u+t) du. \end{aligned} \quad (3.28)$$

因此, 对于每一个  $t \geq 0$ , 存在一个勒贝格零测集  $Y_t$ , (用  $\mu_1$  表一维勒贝格测度,  $\mu_2$  表二维勒贝格测度,) 使得:

$$r_{i,j}(s+t) = \sum_{k \in E} r_{i,k}(s) p_{k,j}(t), \quad (s \notin Y_t, t \geq 0), \quad (3.29)$$

由于(3.29)右端的级数每一项都是  $s$  的勒贝格可测函数( $t$  固定),

都是 $t$ 的连续函数( $s$ 固定), 所以由引理3.4得知它是 $(s, t)$ 的二元勒贝格可测函数, 从而(3.29)右端的级数收敛到一个二元勒贝格可测函数。显然 $r_{i,j}(s+t)$ 也是 $(s, t)$ 的二元勒贝格可测函数, 所以

$$M = \left\{ (s, t) \mid s > 0, t > 0, r_{i,j}(s+t) \neq \sum_{k \in B} r_{i,k}(s) p_{k,j}(t) \right\}$$

是二维勒贝格可测集。再令 $M_s \equiv \{t \mid t \geq 0, (s, t) \in M\}$ ,  $M_t \equiv \{s \mid s \geq 0, (s, t) \in M\}$ 为 $M$ 的两个截面。则利用富比尼定理及(3.29)得:

$$\mu_2(M) = \int_0^\infty \mu_1(M_s) ds = \int_0^\infty \mu_1(M_t) dt = 0. \quad (3.30)$$

作线性变换 $u = s$ ,  $v = s + t$ , 它把集合 $M$ 变为 $N$ 。由于线性变换是保测的, 即 $\mu_2(N) = \mu_2(M) = 0$ 。由 $M$ 的定义看出

$$N = \left\{ (u, v) \mid v > u > 0, r_{i,j}(v) \neq \sum_{k \in B} r_{i,k}(u) p_{k,j}(v-u) \right\}.$$

记 $N_u = \{v \mid v > 0, (u, v) \in N\}$ 为 $N$ 的一个截面。由富比尼定理及 $\mu_2(N) = 0$ 得知: 存在一个 $u$ 的集合 $H$ , 使得 $\mu_1(H) = 0$ ,  $u \in H$ 时 $\mu_1(N_u) = 0$ 。

定义 $g_{i,j}(v)$ 如下:

当 $v > 0$ 时, 取 $u' < v$ ,  $u' \in H$ , 令

$$g_{i,j}(v) = \sum_{k \in B} r_{i,k}(u') p_{k,j}(v-u'), \quad (3.31)$$

当 $v = 0$ 时, 令

$$g_{i,j}(0) = \lim_{v \rightarrow 0+} g_{i,j}(v)^{(1)}. \quad (3.32)$$

(III) 上面所定义的 $g_{i,j}$ 即为所求。

首先我们证明上面所定义的 $g_{i,j}$ 不依赖 $u'$ 的选取。事实上, 任取 $u' < v$ ,  $u'' < v$ ,  $v > 0$ ,  $u', u'' \in H$ 固定, 则由 $H$ 的定义有:

$$\sum_{k \in B} r_{i,k}(u') p_{k,j}(t-u') = r_{i,j}(t)$$

(1) 此极限的存在在以后证明 (iii) 的过程完成。

$$= \sum_{k \in E} r_{i,k}(u'') p_{k,i}(t-u''), [a.e.],$$

在  $(\max(u', u''), \infty)$  中。但是上式左右两边都是  $t$  的连续函数 (证明可仿照定理 3.2。注意  $p_{k,i}(t)$  是连续函数)。因此, 对一切  $t > u', t > u''$  上式均成立。特别地

$$\sum_{k \in E} r_{i,k}(u') p_{k,i}(v-u') = \sum_{k \in E} r_{i,k}(u'') p_{k,i}(v-u'').$$

其次我们证明  $g_{i,j}(v)$  在  $[0, \infty)$  上连续。(当然在  $v=0$  只要求右连续。) 若注意  $g_{i,j}(0)$  的定义, 则只需证明  $g_{i,j}(v)$  在  $v > 0$  连续就可以了。事实上, 任给  $a > 0$ , 当  $v > a$  时,

$$g_{i,j}(v) = \sum_{k \in E} r_{i,k}(a) p_{k,i}(v-a)$$

是  $v$  的连续函数。由  $a$  可以是任意正数得知  $g_{i,j}(v)$  在  $v > 0$  连续。

最后我们证明  $g_{i,j}(v)$  满足 (3.24) 及 (i) — (iv)。因为  $r_{i,j}(v)$  满足 (3.24) 而且由  $g_{i,j}$  的定义又有

$$g_{i,j}(v) = r_{i,j}(v), [a.e.].$$

所以  $g_{i,j}(v)$  满足 (3.24)。现在我们逐一验证  $g_{i,j}$  满足 (i) — (iv)。

(i) 由  $g_{i,j}$  的定义即得  $g_{i,j}(v) \geq 0, (v \geq 0)$ 。由 (3.31) 得,

$$\begin{aligned} \sum_{i \in E} g_{i,j}(v) &= \sum_{k \in E} r_{i,k}(u') \sum_{j \in E} p_{k,i}(v-u') \\ &= \sum_{k \in E} r_{i,k}(u') \equiv 1, \quad (v > 0). \end{aligned}$$

(ii) 完全仿照得到 (3.29) 的办法可知: 对于每一个  $t \geq 0$ , 存在一个勒贝格零测集  $Z_t$ , 使:

$$g_{i,j}(s+t) = \sum_{k \in E} g_{i,k}(s) p_{k,i}(t), \quad (s \notin Z_t, t \geq 0).$$

(3.33)

由于  $t$  固定时, (3.33) 两边都是  $s$  的连续函数, (左边是  $s$  的连续函

数已知。至于右边，因为  $\sum_{j \in E} g_{i,j}(v) \equiv 1, (v > 0), g_{i,j}(u) \geq 0, (v \geq 0), g_{i,j}$  连续，故由迪尼定理知对任何  $b > a > 0, \sum_{j \in E} g_{i,j}(v)$  在  $[a, b]$  上一致收敛。更有  $\sum_{k \in U} g_{i,k}(s)p_{k,j}(v)$  在  $s \in [a, b]$  上一致收敛。而  $g_{i,k}(s)p_{k,j}(t)$  在  $[a, b]$  上是  $s$  的连续函数，所以  $\sum_{k \in U} g_{i,k}(s)p_{k,j}(t)$  在  $[a, b]$  上是  $s$  的连续函数。由于  $b > a > 0$  可以是任意正数，所以 (3.33) 右边当  $t \geq 0$  固定时对  $s$  来说在  $s > 0$  连续。) 所以 (3.33) 对一切  $s > 0, t \geq 0$  均成立。

(iii) 由(ii) 有

$$g_{i,j}(s+t) \geq g_{i,j}(s)p_{i,j}(t), \quad (s > 0, t > 0).$$

令  $s \rightarrow 0+$  得:

$$g_{i,j}(t) \geq \limsup_{s \rightarrow 0+} g_{i,j}(s)p_{i,j}(t),$$

令  $t \rightarrow 0+$  得:

$$\liminf_{t \rightarrow 0+} g_{i,j}(t) \geq \limsup_{s \rightarrow 0+} g_{i,j}(s).$$

所以  $\lim_{t \rightarrow 0+} g_{i,j}(t)$  存在。

由 (3.24) 得:

$$\frac{1 - p_{i,i}(t)}{t} = \frac{1 - e^{-q_i t}}{t} - \frac{q_i e^{-q_i t}}{t} \int_0^t e^{q_i s} g_{i,i}(s) ds.$$

令  $t \rightarrow 0+$  得:

$$q_i = q_i - q_i \lim_{t \rightarrow 0+} g_{i,i}(t).$$

而  $q_i > 0$ , 所以  $\lim_{t \rightarrow 0+} g_{i,i}(t) = 0$ .

由 (3.24) 当  $i \neq j$  时有:

$$\frac{p_{i,j}(t)}{t} = q_i \frac{e^{-q_i t}}{t} \int_0^t e^{q_i s} g_{i,j}(s) ds.$$

令  $t \rightarrow 0+$  得:  $q_{i,j} = q_i \lim_{t \rightarrow 0+} g_{i,j}(t)$ , 即  $\lim_{t \rightarrow 0+} g_{i,j}(t) = \frac{q_{i,j}}{q_i}$ .



(IV) 由(ii) 有

$$q_{i,j}(s+t) = \sum_{k \in E} g_{i,k}(s)p_{k,j}(t), \quad (s > 0, t \geq 0).$$

若注意  $\lim_{t \rightarrow \infty} p_{i,j}(t) = \pi_{ij}$  存在, 并仿照定理3.2, 应用控制收敛定理可得:  $\lim_{t \rightarrow \infty} g_{i,j}(t)$  存在。由 (3.24) 有

$$\begin{aligned} p_{i,j}(t) &= q_i \int_0^t e^{-q_i(t-s)} g_{i,j}(s) ds + e^{-q_i t} \delta_{i,j} \\ &= q_i \int_0^t e^{-q_i s} g_{i,j}(t-s) ds + e^{-q_i t} \delta_{i,j}. \end{aligned}$$

令  $t \rightarrow \infty$ , 得

$$\pi_{i,j} = q_i \int_0^\infty e^{-q_i s} \lim_{t \rightarrow \infty} g_{i,j}(t) ds = \lim_{t \rightarrow \infty} g_{i,j}(t).$$

至于这样的  $g_{i,j}$  只有唯一一组, 那是显然的事实。

现在我们利用以上各引理来证明定理3.6。由引理3.5立即得知  $p_{i,j}(t)$  在  $(0, \infty)$  上有连续导数  $p'_{i,j}(t)$ 。现在我们逐一证明  $p'_{i,j}(t)$  满足定理3.6中的(i)–(V)。把 (3.24) 微商得,

$$q_i e^{q_i t} p_{i,j}(t) + e^{q_i t} p'_{i,j}(t) = q_i e^{q_i t} g_{i,j}(t). \quad (t > 0) \quad (3.34)$$

$$(i) \quad \sum_{j \in E} |p'_{i,j}(t)| \leq q_i \sum_{j \in E} (q_{i,j}(t) + q_{i,j}(t)) = 2q_i. \quad (t \geq 0)$$

(ii) 当  $t > 0$  时,

$$\sum_{j \in E} p'_{i,j}(t) = q_i \left( \sum_{j \in E} p_{i,j}(t) - \sum_{j \in E} g_{i,j}(t) \right) = 0.$$

(iii) 当  $s > 0, t \geq 0$  时, 有

$$q_{i,j}(s+t) = \sum_{k \in E} q_{i,k}(s)p_{k,j}(t),$$

$$p_{i,j}(s+t) = \sum_{k \in E} p_{i,k}(s)p_{k,j}(t),$$

两式相减并注意 (3.34) 得,

$$p'_{i,j}(s+t) = q_i (g_{i,j}(s+t) - p_{i,j}(s+t))$$

$$= q_i \sum_{k \in E} (g_{i,k}(s) - p_{i,k}(s)) p_{k,j}(t)$$

$$= \sum_{k \in E} p'_{i,k}(s) p_{k,j}(t).$$

(IV) 由 (3.34) 得,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0+} p'_{i,j}(t) &= q_i (\lim_{t \rightarrow 0+} g_{i,j}(t) - \delta_{ij}) \\ &= \begin{cases} -q_i, & \text{若 } j=i, \\ q_{i,j} & \text{若 } j \neq i. \end{cases} \end{aligned}$$

(V) 由 (3.34) 还有

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} p'_{i,j}(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} q_i (g_{i,j}(t) - p_{i,j}(t)) \\ &= q_i (\pi_{i,j} - \pi_{i,j}) = 0. \end{aligned}$$

**定理3.7.** 设  $P(t)$  是一个转概率阵而且  $q_i < \infty$ 。则下列二条件等价:

$$(i) \quad p'_{i,j}(t) = \sum_{k \in E} q_{i,k} p_{k,j}(t), \quad (t \geq 0, j \in E);$$

$$(ii) \quad \sum_{k \in E} q_{i,k} = 0.$$

**证** (i)  $\Rightarrow$  (ii)。设 (i) 成立。则由定理3.6得: 对  $t > 0$ , 有

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j \in E} p'_{i,j}(t) = \sum_{j \in E} \sum_{k \in E} q_{i,k} p_{k,j}(t) \\ &= \sum_{k \in E} q_{i,k} \sum_{j \in E} p_{k,j}(t) \\ &= \sum_{k \in E} q_{i,k}. \end{aligned}$$

(注意: 上面的级数交换求和次序是合法的, 因为它绝对收敛.)

(ii)  $\Rightarrow$  (i) 设 (ii) 成立。若  $q_i = 0$ , 则 (i) 显然成立。下设  $0 < q_i < \infty$ 。由引理3.5有

$$g_{i,j}(s+t) = \sum_{k \in E} g_{i,k}(s) p_{k,j}(t), \quad (s > 0, t \geq 0),$$

$$\lim_{t \rightarrow 0+} g_{i,k}(s) = \begin{cases} q_{i,k}/q_i, & k \neq i, \\ 0 & k = i, \end{cases}$$

$q_{i,j}(s)$  在  $[0, \infty)$  上连续,  $\sum_{k \in E} g_{i,k}(s) \equiv 1, (s > 0)$ . 而今 (ii)

成立, 所以  $\sum_{k \in E} \lim_{t \rightarrow 0+} g_{i,k}(s) = 1$ . 因此, 利用海莱定理 (离散分布

的情形) 及 (3.34) 得:

$$\begin{aligned} p'_{i,j}(t) &= q_i(g_{i,j}(t) - p_{i,j}(t)) \\ &= q_i \left( \lim_{t \rightarrow 0+} \sum_{k \in E} g_{i,k}(s) p_{k,j}(t) - p_{i,j}(t) \right), \\ &= q_i \left( \sum_{k \in E} \lim_{t \rightarrow 0+} g_{i,k}(s) p_{k,j}(t) - p_{i,j}(t) \right) \\ &= q_i \left( \sum_{k \neq i} \frac{q_{i,k}}{q_i} p_{k,j}(t) - p_{i,j}(t) \right) \\ &= \sum_{k \in E} q_{i,k} p_{k,j}(t), \quad (t > 0), \end{aligned}$$

而  $t=0$  时上式显然成立. (i) 得证.

**定理 3.8.** 设  $P(t)$  是一个转概阵,  $\sup_{i \in E} q_i < c$ , 记  $Q = (q_{i,j}, i, j \in E)$ , 则

- (i)  $P'(t) - QP(t) = P(t)Q, (t \geq 0)$ ;
- (ii)  $P(t) = e^{Qt}, (t \geq 0)$ ;
- (iii)  $Q\Pi = \Pi Q = 0$ , 其中  $\Pi = \lim_{t \rightarrow \infty} P(t)$ .

反之, 任给一个矩阵  $Q = (q_{i,j}, i, j \in E)$ , 只要  $-\infty < q_{i,i} \leq 0, (i \in E), 0 \leq q_{i,k} < \infty, (i \neq j, i, j \in E), \sum_{j \in E} q_{i,j} = 0, \sup_{i \in E} (-q_{i,i})$

$< \infty$ , 则  $P(t) = e^{Qt}$  是一个转概阵.

**证** (i) 因为  $\sup_{i \in E} q_i < c$ , 所以由定理 3.5 得

$$\sum_{j \in E} q_{i,j} = 0, \quad (i \in E).$$

因此, 由定理3.7得:  $P'(t) = QP(t)$ , ( $t \geq 0$ ). 而对任何  $t > 0$ ,  $0 < h < t$ ,  $i, j \in E$ , 有

$$\frac{p_{i,j}(t+h) - p_{i,j}(t)}{h} = \frac{\sum_{k \in E} p_{i,k}(t)(p_{k,j}(h) - \delta_{k,j})}{h}, \quad (3.35)$$

$$\frac{p_{i,j}(t) - p_{i,j}(t-h)}{h} = \frac{\sum_{k \in E} p_{i,k}(t-h)(p_{k,j}(h) - \delta_{k,j})}{h}. \quad (3.36)$$

但是由定理3.5有

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{1 - p_{i,i}(h)}{h} = q_i, \quad (\text{对 } i \in E \text{ 一致地成立}),$$

所以对任何给定的  $\varepsilon > 0$  存在一个  $h_0 > 0$  (与  $k$  无关) 使得:

$$\frac{1 - p_{k,k}(h)}{h} < q_k + \varepsilon < c + \varepsilon, \quad (k \in E, h < h_0), \quad (3.37)$$

更有

$$\frac{p_{k,j}(h)}{h} \leq \frac{1 - p_{k,k}(h)}{h} < c + \varepsilon, \quad (j \neq k, k, j \in E, h \leq h_0), \quad (3.38)$$

因此, 在 (3.35), (3.36) 中令  $h \rightarrow 0+$ , 并利用控制收敛定理可得:

$$p'_{i,j}(t) = \sum_{k \in E} p_{i,k}(t)q_{k,j}, \quad (t > 0, i, j \in E).$$

显然上式对  $t = 0$  也成立。这就证明了:

$$P'(t) = P(t)Q, \quad (t \geq 0).$$

(ii) 因为

$$p'_{i,j}(t) = \sum_{k \in E} q_{i,k}p_{k,j}(t),$$

而且由定理3.6有

$$\sum_{k \in E} |q_{i,k} p'_{k,i}(t)| \leq \sum_{k \in E} |q_{i,k}| 2q_k \leq 4c^2,$$

所以  $\sum_{k \in E} q_{i,k} p'_{k,i}(t)$

在  $[0, \infty)$  上一致收敛。因此,  $p'_{i,i}(t) = \sum_{k \in E} q_{i,k} p_{k,i}(t)$  可以逐项

微商, 微商之, 得:

$$p''_{i,i}(t) = \sum_{k \in E} q_{i,k} p'_{k,i}(t) = \sum_{k \in E} q_{i,k} \sum_{l \in E} q_{k,l} p_{l,i}(t).$$

即是

$$P''(t) = Q^2 P(t), \quad (t \geq 0).$$

仿上, 继续作下去, 可以看出

$$\frac{d^n}{dt^n} P(t) = Q^n P(t), \quad (t \geq 0, n \geq 1).$$

因此

$$P(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n Q^n}{n!} = e^{Qt}.$$

(iii) 因为

$$P'(t) = QP(t), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} P'(t) = 0,$$

所以, 若注意  $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \Pi$ , 并应用控制收敛定理即可得

$$0 = Q\Pi.$$

又因为

$$P'(t) = P(t)Q,$$

若记

$$D_q = \text{diag}(q_i, i \in E), \quad S = Q + D_q,$$

则用法都引理有:

$$0 = \liminf_{t \rightarrow \infty} P'(t) \geq \Pi S - \Pi D_q.$$

但是  $\sup_{i \in E} q_i < c,$

所以  $Q\mathbf{1} = 0.$

因此  $(\Pi S - \Pi D_q)\mathbf{1} = \Pi S\mathbf{1} - \Pi D_q\mathbf{1}$   
 $= \Pi D_q\mathbf{1} - \Pi D_q\mathbf{1} = 0,$

故  $O = \Pi Q.$

现任给  $Q = (q_{i,j}), i, j \in E$ , 若  $Q$  满足定理 3.8 中的条件, 往证  $P(t) = e^{Qt}$  是一个转概阵。显然  $P(t)$  满足  $P(t)\mathbf{1} = \mathbf{1}, P(s+t) = P(s)P(t), (0 \leq s, t < \infty), \lim_{t \rightarrow 0+} P(t) = P(0) = I$ . 下面证明  $P(t) \geq 0, (t \geq 0)$ . 事实上, 若  $q_{ij} > 0, (i \neq j)$ , 则仿照定理 2.1 可以证明  $P(t) \geq 0, (t \geq 0)$ . 若  $Q$  不满足:  $q_{ij} > 0, (i \neq j)$ . 令

$$Q_n = (q_{i,j}^{(n)}), i, j \in E,$$

$$q_{i,j}^{(n)} = q_{i,j} + \frac{a_{i,j}}{n}, (i \neq j), a_{i,j} > 0,$$

$$q_{i,i}^{(n)} = q_{i,i} - \frac{a_i}{n},$$

$$\sum_{j \neq i} a_{i,j} = a_i, a_i > 0, \sup_{i \in E} a_i \leq d < 1,$$

则  $Q_n$  是一个满足定理 3.8 中的  $Q$  所具有的一切条件的转强阵, 因此, 若令

$$P_n(t) = e^{Q_n t},$$

则有  $P_n(t) \geq 0$ . 但是,  $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = Q$ , 所以

$$P(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(t) \geq 0.$$

至此, 定理 3.8 证毕.

## §4. 准转概阵的分析理论

在 § 3 中, 我们详细地研究了转概阵的分析理论。现在我们问: 转概阵的分析理论可否推广到准转概阵上去? 再问: 由于从

转概阵到准转概阵研究的对象已经扩大了, 是否随之研究的问题也可以增多呢? 两个问题的回答都是肯定的。

在这一节中, 如果不特别声明, 我们恒用  $P(t)$  表准转概阵,  $P(t) = (p_{i,j}(t), i, j \in E)$ ,  $E$  是一个可数集,  $t \in \mathcal{T} = [0, \infty)$ 。

首先我们研究上面提出的第一个问题。研究这个问题的基础是下面的命题:

**命题4.1.** 设  $P(t)$  是一个准转概阵。作

$$\tilde{P}(t) = \begin{matrix} \Delta & E \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d(t) & P(t) \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad d(t) = 1 - P(t)1,$$

即是把  $E$  扩充成  $\tilde{E} = E \cup \{\Delta\}$ ,  $\Delta$  是不属于  $E$  的任何一个元素, 定义  $\tilde{P}(t) = (\tilde{p}_{i,j}(t), i, j \in \tilde{E})$ , 其中  $\tilde{p}_{i,j}(t) = p_{i,j}(t), (i, j \in E)$ ,  $\tilde{p}_{\Delta,j}(t) = 0, (j \in E)$ ,  $\tilde{p}_{\Delta,\Delta}(t) = 1, \tilde{p}_{i,\Delta}(t) = 1 - \sum_{j \in E} p_{i,j}(t), (i \in E)$ , 则  $\tilde{P}(t)$  是一个转概阵。(因此  $d'(0)$  存在, 而且  $0 \leq d'(0) < \infty$ .)

**证** 显然  $0 \leq \tilde{P}(t), \tilde{P}(t)1 \equiv 1$ . 又因为

$$0 \leq \tilde{p}_{i,\Delta}(t) = 1 - \sum_{j \in E} p_{i,j}(t) \leq 1 - p_{i,i}(t), (i \in E),$$

而  $\lim_{t \rightarrow 0} (1 - p_{i,i}(t)) = 0$ , 所以  $\lim_{t \rightarrow 0} \tilde{p}_{i,\Delta}(t) = 0, (i \in E)$ , 再利用  $P(t)$  是一个准转概阵即可知  $\lim_{t \rightarrow 0} \tilde{P}(t) = I$ . 最后, 对任何  $s \geq 0, t \geq 0$ , 有

$$\begin{aligned} \tilde{P}(s)\tilde{P}(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d(s) + P(s)d(t) & P(s)P(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d(s+t) & P(s+t) \end{pmatrix} = \tilde{P}(s+t). \end{aligned}$$

所以  $\tilde{P}(t)$  是一个转概阵。

**附注:**  $d(t)$  对  $t$  单调非降。事实上, 对任何  $i \in E$ , 有  $p_{i,\Delta}(s+t) \geq$

$$p_{i,\Delta}(s)p_{\Delta,\Delta}(t) = p_{i,\Delta}(s), (s \geq 0, t \geq 0).$$

基于命题4.1, 对于准转概阵 $P(t)$ , 我们有下列结果: (仍沿用 § 3 的符号)

(I)  $|p_{i,j}(t) - p_{i,j}(s)| \leq 1 - p_{i,i}(|t-s|)$ , ( $i \in E, J \subset E, s, t \geq 0$ ).

(II)  $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t)$  存在, 记此极限为  $\Pi$ , 还有  $\Pi P(t) = P(t) \Pi = \Pi^2 = \Pi$ .

(III)  $\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{1}{t} (1 - p_{i,i}(t))$  存在, 记此极限为  $q_i$  (或  $-q_{i,i}$ ),

还有  $0 \leq q_i \leq \infty$ ,  $p_{i,i}(t) \geq e^{-q_i t}$ , ( $i \in E, t \geq 0$ ), ( $e^{-\infty}$  定义为 0). 特别地, 若  $q_i = 0$ , 则  $p_{i,i}(t) \equiv 1$ ,  $p_{i,j}(t) \equiv 0$ , ( $j \neq i, j \in E$ ).

(IV) 固定  $i \in E, J \in \mathcal{A}, i \in J$ , 均有:

(i) 当  $K \subset J$  时,  $\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{1}{t} p_{i,K}(t)$  存在, 记此极限为  $q_{i,K}$ , 则  $0 \leq$

$q_{i,K} < \infty$ , 而且此极限对  $K \subset J$  是一致成立的。

(ii)  $q_{i,K}$  对  $K \subset J$  来说, 有完全可加性。

系 1. 若  $i \neq j$ , 则

(i)  $\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{p_{i,j}(t)}{t}$  存在, 记此极限为  $q_{i,j}$ , 这时  $0 \leq q_{i,j} < \infty$ ,

(ii)  $\sum_{j \neq i} q_{i,j} \leq q_i$ .

上述四定理可以直接从命题4.1及 § 3 的定理3.1—3.4得到。

(V) 下面两个条件等价:

(i)  $\sup_{i \in E} q_i < \infty$ ;

(ii)  $\lim_{t \rightarrow 0+} \sup_{i \in E} (1 - p_{i,i}(t)) = 0$ .

如果上述条件中有一个成立, 则

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{1 - p_{i,i}(t)}{t} = q_i, \quad (\text{对 } i \in E \text{ 一致地成立}),$$

而且还有



$$\sum_{\substack{j \sim i \\ j \in E}} q_{i,j} = \lim_{t \rightarrow 0+} \sum_{\substack{j \sim i \\ j \in E}} \frac{p_{i,j}(t)}{t}, \quad (i \in E),$$

证 (i)  $\iff$  (ii) 由定理3.5及命题4.1立刻可以得到。若(i)满足, 由  $q_i = 0$  得知  $\sup_{j \in E} q_{i,j} < \infty$ , 所以由定理3.5得:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - p_{i,i}(t)}{t} = q_i, \quad (\text{对 } i \in \tilde{E} \text{ 一致地成立}),$$

$$q_i = \sum_{\substack{j \sim i \\ j \in \tilde{E}}} q_{i,j}, \quad i \in \tilde{E}.$$

所以对任何  $i \in E$ , 有:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{j \sim i \\ j \in E}} q_{i,j} &= q_i - q_{i,i} = \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{1 - p_{i,i}(t)}{t} - \frac{1 - \sum_{j \in E} p_{i,j}(t)}{t} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \sum_{\substack{j \sim i \\ j \in E}} \frac{p_{i,j}(t)}{t}. \end{aligned}$$

(VI) 固定  $i \in E$ , 设  $0 < q_i < \infty$ , 则有: 唯一一组  $g_{i,j}(t)$ , ( $t \geq 0, j \in E$ ), 它在  $[0, \infty)$  上连续, 使得

$$p_{i,j}(t) = q_i e^{-q_i t} \int_0^t e^{q_i s} g_{i,j}(s) ds + e^{-q_i t} \delta_{i,j}, \quad (j \in E, t \geq 0).$$

此外它还满足:

$$(i) \quad g_{i,j}(t) \geq 0, \quad (t \geq 0, j \in E), \quad \sum_{j \in E} g_{i,j}(t) \leq 1, \quad (t > 0);$$

$$(ii) \quad g_{i,j}(s+t) = \sum_{k \in E} g_{i,k}(s) p_{k,j}(t), \quad (s > 0, t \geq 0, j \in E);$$

$$(iii) \quad \lim_{t \rightarrow 0+} g_{i,j}(t) = \begin{cases} 0, & j \in E, j \neq i, \\ q_{i,i}/q_i, & j \in E, j = i; \end{cases}$$

$$(iv) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} g_{i,j}(t) = \pi_{i,j}, \quad (j \in E), \quad \text{其中 } \pi_{i,j} = \lim_{t \rightarrow \infty} p_{i,j}(t). \quad \text{因}$$

此,  $p_{i,j}(t)$  在  $(0, \infty)$  上有连续导数  $p'_{i,j}(t)$ , 它可以表为

$$p'_{i,j}(t) = q_i g_{i,j}(t) - q_i p_{i,j}(t),$$

由此式及 $g_{i,j}$ 的性质我们还可以得出 $p'_{i,j}(t)$ 满足:

$$(i) \sum_{j \in E} |p'_{i,j}(t)| \leq 2q_i, \quad (t \geq 0),$$

$$(ii) \sum_{j \in E} p'_{i,j}(t) \leq 0, \quad (t > 0),$$

$$(iii) \sum_{h \in E} p'_{i,h}(s) p_{h,j}(t) = p'_{i,j}(s+t), \quad (j \in E, s > 0, t \geq 0),$$

$$(iv) \lim_{t \rightarrow 0+} p'_{i,j}(t) = p'_{i,j}(0) = q_{i,j}, \quad (j \in E),$$

$$(v) \lim_{t \rightarrow \infty} p'_{i,j}(t) = 0, \quad (j \in E).$$

**证** 除了 $p'_{i,j}(t)$ 满足(iii)和(ii)须要简单说明一下以外, 其它诸结论均可从引理3.5, 定理3.6及命题4.1直接得到。

因为 $i \in E$ 时, 由定理3.6有

$$p'_{i,\Delta}(t) + \sum_{j \in E} p'_{i,j}(t) = 0, \quad p'_{i,\Delta}(t) \geq 0, \quad (t > 0),$$

所以(ii)得证。至于(iii), 注意当 $j \in E$ 时 $p_{\Delta,j}(t) \equiv 0$ , 则有

$$\begin{aligned} p'_{i,j}(s+t) &= \sum_{h \in E} p'_{i,h}(s) p_{h,j}(t) + p'_{i,\Delta}(s) p_{\Delta,j}(t) \\ &= \sum_{h \in E} p'_{i,h}(s) p_{h,j}(t), \quad (s > 0, t \geq 0). \end{aligned}$$

(VII) 固定 $i \in E$ , 设 $q_i < \infty$ , 则下列两命题等价:

$$(i) p'_{i,j}(t) = \sum_{h \in E} q_{i,h} p_{h,j}(t), \quad (t \geq 0, j \in E),$$

$$(ii) \sum_{\substack{j \in E \\ j \neq i}} q_{i,j} = \lim_{t \rightarrow 0+} \sum_{\substack{j \in E \\ j \neq i}} \frac{p_{i,j}(t)}{t}.$$

**证** (i)  $\Rightarrow$  (ii). 设(i)成立。把(i)对 $j \in E$ 求和并注意 $t > 0$

时  $p'_{i,\Delta}(t) + \sum_{j \in E} p'_{i,j}(t) = 0$  得:

$$-p'_{i,\Delta}(t) = \sum_{k \in E} q_{i,k}(1 - p_{k,\Delta}(t)), \quad (t > 0).$$

令  $t \rightarrow 0+$  得:

$$-q_{i,\Delta} = \sum_{k \in E} q_{i,k}.$$

所以

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{j \in E \\ j \neq i}} q_{i,j} &= q_i - q_{i,\Delta} = \lim_{t \rightarrow 0+} \left( \frac{(1 - p_{i,i}(t)) - (1 - \sum_{j \in E} p_{i,j}(t))}{t} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\sum_{\substack{j \in E \\ j \neq i}} p_{i,j}(t)}{t}. \end{aligned}$$

(ii)  $\Rightarrow$  (i). 设(ii)成立. 即是

$$\sum_{\substack{j \neq i \\ j \in E}} q_{i,j} = -q_{i,i} - q_{i,\Delta},$$

亦即 
$$\sum_{j \in \tilde{E}} q_{i,j} = 0.$$

所以由定理3.7有

$$p'_{i,j}(t) = \sum_{k \in \tilde{E}} q_{i,k} p_{k,j}(t), \quad (t \geq 0, i, j \in \tilde{E}).$$

但  $p_{\Delta,j}(t) \equiv 0$  ( $j \in E, t \geq 0$ ), 故(ii)成立。

(VIII) 假定  $\sup_{i \in E} q_i < \infty$ , 则

(i)  $P'(t) = QP(t) = P(t)Q, \quad (t \geq 0),$

(ii)  $P(t) = e^{Qt}, \quad (t \geq 0),$

(iii)  $\Pi Q = Q\Pi = 0.$

反之, 任给一个转强阵  $Q = (q_{ij}, i, j \in E)$  (所谓  $Q$  是转强阵, 意即  $-\infty < q_{ii} \leq 0, (i \in E), 0 \leq q_{ij} < \infty, (i \neq j, i, j \in E) Q1 \leq 0$ ).

特别地若还有  $Q1=0$ , 则称此转强阵是保守的), 若  $\sup_{i \in E} (-q_{ii}) < \infty$ , 则  $e^{Q^t}$  是一个准转概阵.

证 如命题 4.1 一样, 作转概阵

$$\begin{array}{c} \Delta \quad E \\ \bar{P}(t) = \begin{array}{c} \Delta \\ E \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d(t) & P(t) \end{pmatrix}, \quad d(t) = 1 - P(t)1. \end{array}$$

令  $\bar{Q} = \bar{P}'(0)$ , 则

$$\begin{array}{c} \Delta \quad E \\ \bar{Q} = \begin{array}{c} \Delta \\ E \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ d(0) & Q \end{pmatrix}. \end{array}$$

由定理 3.8 有

$$(i) \quad \bar{P}'(t) = \bar{Q} \bar{P}(t) = \bar{P}(t) \bar{Q}, \quad (t \geq 0),$$

更有  $P'(t) = QP(t) = P(t)Q$ .

$$(ii) \quad \bar{P}(t) = e^{\bar{Q}t} = \begin{array}{c} \Delta \quad E \\ E \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ M & e^{Qt} \end{pmatrix},$$

更有  $P(t) = e^{Qt}$ .

$$(iii) \quad \tilde{\Pi} \bar{Q} = \bar{Q} \tilde{\Pi} = 0, \quad \text{其中}$$

$$\begin{array}{c} \Delta \quad E \\ \tilde{\Pi} = \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{P}(t) = \begin{array}{c} \Delta \\ E \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ N & \Pi \end{pmatrix}, \end{array}$$

所以  $\Pi Q = Q \Pi = 0$ .

反之, 任给一个转强阵  $Q = (q_{ij}, i, j \in E)$ , 满足  $\sup_{i \in E} (-q_{ii}) < \infty$ . 作

$$\begin{array}{c} \Delta \quad E \\ \tilde{Q} = \begin{array}{c} \Delta \\ E \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -Q1 & Q \end{pmatrix}. \end{array}$$

则  $\tilde{Q}$  是一个保守的转强阵, 而且若记  $\tilde{Q} = (\tilde{q}_{ij}, i, j \in \tilde{E})$ , 则有

$\sup_{i \in E} (-\tilde{q}_{i,i}) < \infty$ . 所以由定理3.8得知  $e^{\tilde{Q}t}$  是一个转概阵。但是

$$e^{\tilde{Q}t} = \begin{matrix} \Delta & E \\ E & \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T & e^{Q_t} \end{pmatrix},$$

所以  $e^{Q_t}$  是一个准转概阵。

前面我们都是从准转概阵（或者转概阵）出发，来讨论它的连续性、可微性及其微商的性质……等等。但是在不少实际问题（例如排队论）中，转概阵往往事先不知道，而只知道其转强阵  $Q \equiv P'(0)$ ，这就给我们提出了问题：给定任何一个转强阵  $Q$ ，是否恒存在一个转概阵（或准转概阵） $P(t)$ ，使得  $P'(0) = Q$ ？这种转概阵（或准转概阵）是否唯一？如果不唯一，其全体如何构造？下面我们就来讨论这些问题。

**定义4.1.** 给定一个转强阵  $Q$ 。称准转概阵  $P(t)$  是一个  $Q$ -过程，如果它满足  $P'(0) = Q$ 。特别地，若  $P(t)$  还满足  $P(t)1 \equiv 1$ ，即是说  $P(t)$  还是一个转概阵，则称  $P(t)$  是一个不间断的（简称不断的） $Q$ -过程，反之就称为间断的。若  $P(t) = QP(t)$ , ( $t \geq 0$ )，则称  $P(t)$  满足倒退方程式，简称满足 (B)；若  $P'(t) = P(t)Q$ , ( $t \geq 0$ )，则称  $P(t)$  满足前进方程式，简称满足 (F)。

**定理4.1.** 设  $Q$  是一个转强阵， $P(t)$  是一个  $Q$ -过程，则有：

(i)  $P'(t) \geq QP(t)$ , ( $t \geq 0$ )；

(ii)  $P'(t) \geq P(t)Q$ , ( $t \geq 0$ )，

和

(i)'  $P(t) \geq \Delta(t) + \int_0^t \Delta(t-s)SP(s)ds$ ,

(ii)'  $P(t) \geq \Delta(t) + \int_0^t \Delta(t-s)(D_sP(s) + P(s)S - P(s)D_q)$

$\cdot ds$ 。其中  $D_q = \text{diag}(q_i, i \in E)$ , ( $q_i = -q_{i,i}$ )， $S = Q + D_q$ ,  $\Delta(t) = \text{diag}(e^{-q_{i,i}t}, i \in E)$ 。

**证** 因为

$$\frac{P(s+t) - P(t)}{s} = \frac{P(s) - I}{s} P(t) = P(t) \frac{P(s) - I}{s},$$

令  $s \rightarrow 0+$ , 并利用法都引理即得(i)和(ii)。

用分部积分得:

$$\begin{aligned} & \int_0^t \Delta(t-s) P'(s) ds \\ &= P(t) - \Delta(t) - \int_0^t D_q \Delta(t-s) P(s) ds \\ &= P(t) - \Delta(t) - \int_0^t \Delta(t-s) D_q P(s) ds, \end{aligned}$$

所以

$$P(t) = \Delta(t) + \int_0^t \Delta(t-s) (P'(s) + D_q P(s)) ds. \quad (4.1)$$

用(i)得:

$$\begin{aligned} P(t) &\geq \Delta(t) + \int_0^t \Delta(t-s) (QP(s) + D_q P(s)) ds \\ &= \Delta(t) + \int_0^t \Delta(t-s) SP(s) ds. \end{aligned} \quad (4.2)$$

此即(i)'。

利用(4.1)及(ii)得:

$$P(t) \geq \Delta(t) + \int_0^t \Delta(t-s) (D_q P(s) + P(s)S - P(s)D_q) ds, \quad (4.3)$$

此即(ii)'成立。

**定理4.2.** 设  $Q$  是一个转强阵,  $P(t)$  是一个  $Q$ -过程。则下列三条件等价:

$$(B) \quad P'(t) = QP(t), \quad (t \geq 0);$$

$$(B)' \quad P(t) = \Delta(t) + \int_0^t \Delta(t-s) SP(s) ds, \quad (t \geq 0);$$

$$(B_\lambda) \quad (\lambda I - Q)R(\lambda) = I, \quad (\lambda > 0),$$

其中

$$R(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} P(t) dt \quad (\lambda > 0)$$

为  $P(t)$  的拉氏变换.

类似地, 下列三条件等价:

$$(F) \quad P'(t) = P(t)Q, \quad (t \geq 0);$$

$$(F') \quad P(t) = \Delta(t) + \int_0^t \Delta(t-s)(D_q P(s) + P(s)S - P(s)D_q) ds, \quad (t \geq 0);$$

$$(F_1) \quad R(\lambda)(M - Q) = I, \quad (\lambda > 0).$$

**证** 由 (4.1) 立即看出  $(B) \iff (B)'$ ,  $(F) \iff (F)'$ . 下面我们证明  $(F)' \iff (F_1)$ . (类似地可以证明  $(B)' \iff (B_1)$ .) 容易算出  $\Delta(t)$  的拉氏变换为  $(M + D_q)^{-1}$ . 又

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt \int_0^t \Delta(t-s)(D_q P(s) + P(s)S - P(s)D_q) ds \\ &= \int_0^{\infty} ds \int_s^{\infty} e^{-\lambda t} \Delta(t-s) dt (P(s)S + D_q P(s) - P(s)D_q) \\ &= \int_0^{\infty} ds \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} e^{-\lambda s} \Delta(t) dt (P(s)S + D_q P(s) - P(s)D_q) \\ &= \int_0^{\infty} ds (\lambda I + D_q)^{-1} (P(s)S + D_q P(s) - P(s)D_q) e^{-\lambda s} \\ &= (\lambda I + D_q)^{-1} (R(\lambda)S + D_q R(\lambda) - R(\lambda)D_q). \end{aligned}$$

所以

$$P(t) = \Delta(t) + \int_0^t \Delta(t-s)(D_q P(s) + P(s)S - P(s)D_q) ds$$

的拉氏变换为

$$\begin{aligned} R(\lambda) &= (\lambda I + D_q)^{-1} + (\lambda I + D_q)^{-1} (R(\lambda)S \\ &\quad + D_q R(\lambda) - R(\lambda)D_q) \\ &= (\lambda I + D_q)^{-1} (R(\lambda)(M - Q) + I). \end{aligned}$$

所以, 由拉氏变换的唯一性得知:

$$P(t) = \Delta(t) + \int_0^t \Delta(t-s)(D_q P(s) + P(s)S - P(s)D_q) ds, \quad [a.e] \quad (4.4)$$

的充要条件是

$$R(\lambda)(\lambda I - Q) = I, \quad (\lambda > 0).$$

但是(4.4)左, 右两边都对 $t$ 连续, 所以 $(F)' \iff (F_1)$ .

定理4.3. (存在性定理)。任意给定一个转强阵 $Q$ , 必存在一个 $Q$ -过程 $\bar{P}(t)$ , 它满足(B) 与 (F), 而且对任何 $Q$ -过程 $P(t)$ 来说, 恒有 $P(t) \geq \bar{P}(t)$ , ( $t \geq 0$ )。

证 令 $D_q$ 、 $S$ 、 $\Delta(t)$ 之意义如定理4.1。显然 $S \geq 0$ 。

定义 $P_0(t) = \Delta(t)$ , 对 $n \geq 1$ , 令

$$P_n(t) = \int_0^t \Delta(t-s) S P_{n-1}(s) ds,$$

$$\bar{P}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t).$$

往证 $\bar{P}(t)$ 即为所求。

(1) 首先证明 $\bar{P}(t)$ 是一个准转概阵。由于对一切 $n \geq 0$ ,  $P_n(t) \geq 0$ , 所以 $\bar{P}(t) \geq 0$ 。对 $n$ 作归纳法可以证明: 对任何 $n \geq 0$ , 有 $\sum_{k=0}^n P_k(t) 1 \leq 1$ , 从而 $\bar{P}(t) 1 \leq 1$ 。事实上, 显然有 $P_0(t) 1 = \Delta(t) 1$

$\leq 1$ 。设 $\sum_{k=0}^n P_k(t) 1 \leq 1$ , 则

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{n+1} P_k(t) 1 \\ &= P_0(t) 1 + \int_0^t \Delta(t-s) S \sum_{k=0}^n P_k(s) 1 ds \\ &\leq P_0(t) 1 + \int_0^t \Delta(t-s) S 1 ds. \end{aligned}$$

再注意 $Q 1 \leq 0$ ,  $S = Q + D_q$ , 则得:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{n+1} P_k(t) 1 \leq P_0(t) 1 + \int_0^t \Delta(t-s) D_q 1 ds \\ &= \Delta(t) 1 + 1 - \Delta(t) 1 = 1. \end{aligned}$$



至此，归纳法完成了。下面证明  $\bar{P}(t)$  满足  $(K-c)$  方程式： $\bar{P}(s+t) = \bar{P}(s)\bar{P}(t)$ ， $(s \geq 0, t \geq 0)$ 。为此，我们先对  $n$  作归纳法来证明：

对任何  $n \geq 0$ ，有  $P_n(s+t) = \sum_{k=0}^n P_k(s)P_{n-k}(t)$ ， $(s \geq 0, t \geq 0)$ 。事

实上，当  $n=0$  时， $P_0(s+t) = \Delta(s+t) = \Delta(s)\Delta(t) = P_0(s)P_0(t)$ 。

今设对  $n$  上述等式成立，则

$$\begin{aligned}
 P_{n+1}(s+t) &= \int_0^{s+t} \Delta(s+t-u)S P_n(u)du \\
 &= \int_0^{s+t} \Delta(s)\Delta(t-u)S P_n(u)du \\
 &= \int_0^s \Delta(s)\Delta(t-u)S P_n(u)du \\
 &\quad + \int_0^t \Delta(s-u)S P_n(u+t)du \\
 &= \Delta(s) \int_0^t \Delta(t-u)S P_n(u)du \\
 &\quad + \int_0^s \Delta(s-u)S \sum_{k=0}^n P_k(u)P_{n-k}(t)du \\
 &= P_0(s)P_{n+1}(t) + \sum_{k=0}^n \left( \int_0^s \Delta(s-u)S P_k(u)du \right) P_{n-k}(t) \\
 &= P_0(s)P_{n+1}(t) + \sum_{k=0}^n P_{k+1}(s)P_{n-k}(t) \\
 &= \sum_{k=0}^{n+1} P_k(s)P_{n+1-k}(t) *
 \end{aligned}$$

利用上述等式立即得：

$$\begin{aligned}
 \bar{P}(s+t) &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(s+t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n P_k(s)P_{n-k}(t) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} P_k(s) \sum_{n=k}^{\infty} P_{n-k}(t)
 \end{aligned}$$

$$= \bar{P}(s)\bar{P}(t), \quad (s \geq 0, t \geq 0).$$

现在我们证明  $\lim_{t \rightarrow 0+} \bar{P}(t) = \bar{P}(0) = I$ . 因为

$$\sum_{k=0}^n P_k(t) = \Delta(t) + \int_0^t \Delta(t-s) S \sum_{k=0}^{n-1} P_k(s) ds,$$

令  $n \rightarrow \infty$  即得:

$$\bar{P}(t) = \Delta(t) + \int_0^t \Delta(t-s) S \bar{P}(s) ds. \quad (4.5)$$

所以  $\lim_{t \rightarrow 0+} \bar{P}(t) = \bar{P}(0) = I$ . 至此, 我们证明了  $\bar{P}(t)$  是一个准转概阵。

(2) 其次我们证明:  $\bar{P}'(0) = Q$ . 事实上,

$$\frac{\bar{P}(t) - I}{t} = \frac{\Delta(t) - I}{t} + \frac{1}{t} \int_0^t \Delta(t-s) S \bar{P}(s) ds,$$

令  $t \rightarrow 0+$ , 上式右方趋于  $-D_0 + S = Q$ .

(3) 再次, 我们证明对任何  $Q$ -过程  $P(t)$  来说, 恒有  $P(t) \geq \bar{P}(t)$ . 记  $P(t) = (p_{i,j}(t), i, j \in E)$ . 由于  $p_{i,j}(t) \geq e^{-q_i t}$ , 所以  $P(t) \geq P_0(t)$ . 今设

$$P(t) \geq \sum_{k=0}^n P_k(t),$$

则由定理4.1有

$$\begin{aligned} P(t) &\geq \Delta(t) + \int_0^t \Delta(t-s) S P(s) ds \\ &\geq P_0(t) + \int_0^t \Delta(t-s) S \sum_{k=0}^n P_k(s) ds \\ &= \sum_{k=0}^{n+t} P_k(s). \end{aligned}$$

所以对任何  $n \geq 0$ , 恒有  $P(t) \geq \sum_{k=0}^n P_k(t)$ , 从而  $P(t) \geq \bar{P}(t)$ .

(4) 最后我们证明  $\bar{P}(t)$  满足(B) 及(F).

事实上, 由(4.5) 和定理4.2立即得到  $\bar{P}(t)$  满足(B). 至于(F), 令  $\bar{R}(\lambda)$ ,  $R_n(\lambda)$  分别为  $\bar{P}(t)$ ,  $P_n(t)$  的拉氏变换. 容易算出  $R_0(\lambda) = (\lambda I + D_q)^{-1}$ ,  $R_n(\lambda) = \Pi(\lambda)R_{n-1}(\lambda)$ , ( $n \geq 1$ ), 其中  $\Pi(\lambda) = (\lambda I + D_q)^{-1}S$ , 所以  $\bar{P}(t)$  的拉氏变换为

$$\begin{aligned}\bar{R}(\lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty} R_n(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \Pi^n(\lambda) (\lambda I + D_q)^{-1} \\ &= (\lambda I + D_q)^{-1} \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \Pi^n(\lambda) (\lambda I + D_q)^{-1} S (\lambda I + D_q)^{-1},\end{aligned}$$

所以

$$\bar{R}(\lambda)(\lambda I + D_q) = I + \bar{R}(\lambda)S.$$

亦即  $\bar{R}(\lambda)(\lambda I - Q) = I$ . 此即  $\bar{R}(\lambda)$  满足(F<sub>1</sub>), 所以由定理4.2得知  $\bar{P}(t)$  满足(F). 至此, 定理4.3证毕.

**定理4.4.** 给定保守的转强阵  $Q$ . 记  $\bar{y}(\lambda) = 1 - \lambda \bar{R}(\lambda)1$ , 则

- (i) 当  $n \rightarrow \infty$  时,  $\Pi^n(\lambda)1$  单调下降到  $\bar{y}(\lambda)$ ;
- (ii)  $\bar{y}(\lambda)$  是  $\langle \Pi(\lambda)y = y, 0 \leq y \leq 1 \rangle$  的最大解;
- (iii)  $\bar{y}(\lambda) = 0$  的充要条件是:  
 $\langle (\lambda I - Q)y = 0, 0 \leq y \leq 1 \rangle$  仅有零解.

**证** (i) 令  $S_n(\lambda) = \sum_{k=0}^n R_k(\lambda)$ , 则

$$\begin{aligned}S_n(\lambda) &= R_0(\lambda) + (I + \Pi(\lambda) + \cdots + \Pi^{n-1}(\lambda))(\lambda I + D_q)^{-1} \\ &\quad S(\lambda I + D_q)^{-1},\end{aligned}$$

所以  $S_n(\lambda)(\lambda I + D_q) = I + S_{n-1}(\lambda)S$ .

若注意  $Q1 = 0$ ,  $Q = S - D_q$ , 则得:

$$\lambda S_n(\lambda)1 + S_n(\lambda)D_q 1 = 1 + S_{n-1}(\lambda)S1 = 1 + S_{n-1}(\lambda)D_q 1. \quad (4.6)$$

故  $S_n(\lambda)D_q 1 \leq 1 + S_{n-1}(\lambda)D_q 1$ .

而  $S_0(\lambda)D_q 1 = R_0(\lambda)D_q 1 = (\lambda + D_q)^{-1}D_q 1 < \infty$ ,

所以, 对一切  $n \geq 0$ , 有

$$S_n(\lambda)D_q 1 < \infty.$$

因此, 可以在 (4.6) 左, 右边减去  $S_{n-1}(\lambda)D_q 1$ , 减去以后得:

$$\lambda S_n(\lambda)1 + R_n(\lambda)D_q 1 = 1,$$

即  $\lambda S_n(\lambda)1 + \Pi^n(\lambda)(\lambda + D_q)^{-1}D_q 1 = 1.$

但是  $S1 = D_q 1$ ,

所以  $\lambda S_n(\lambda)1 + \Pi^n(\lambda)(\lambda + D_q)^{-1}S1 = 1,$

即是  $\lambda S_n(\lambda)1 + \Pi^{n+1}(\lambda)1 = 1,$

亦即  $\Pi^{n+1}(\lambda)1 = 1 - \lambda S_n(\lambda)1. \quad (4.7)$

但是  $n \rightarrow \infty$  时,  $S_n(\lambda)$  单调上升到  $\bar{R}(\lambda)$ , 所以由 (4.7) 看出:  
 $n \rightarrow \infty$  时  $\Pi^n(\lambda)1$  单调下降到  $\bar{y}(\lambda)$ .

(ii) 由(i)有

$$\begin{aligned} \Pi(\lambda)\bar{y}(\lambda) &= \Pi(\lambda)\lim_{n \rightarrow \infty} \Pi^n(\lambda)1 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \Pi^{n+1}(\lambda)1 = \bar{y}(\lambda). \end{aligned}$$

显然  $\bar{y}(\lambda) = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} (1 - P(t)1) dt,$

所以  $0 \leq \bar{y}(\lambda) \leq 1$ . 这就证明了  $\bar{y}(\lambda)$  是

$$\langle \Pi(\lambda)y = y, 0 \leq y \leq 1 \rangle$$

的一个解。今设  $y$  为另一解, 则  $0 \leq y \leq 1$ ,  $\Pi(\lambda)y = y$ , 故  $y = \Pi^n(\lambda)y \leq \Pi^n(\lambda)1$ , 令  $n \rightarrow \infty$  即得

$$y \leq \bar{y}(\lambda).$$

故  $\bar{y}(\lambda)$  是最大解。

(iii) 由(ii)得知:  $\bar{y}(\lambda) = 0$  的充要条件是  $\langle \Pi(\lambda)y = y, 0 \leq y \leq 1 \rangle$  只有零解。而  $\Pi(\lambda) = (\lambda + D_q)^{-1}S$ , 所以当  $0 \leq y \leq 1$  时, 有:

$\Pi(\lambda)y = y \iff Sy = (\lambda + D_q)y \iff (\lambda - Q)y = 0$ . 这就证明了(iii)。

定理4.5. 给定保守的转强阵 $Q$ . 恰有唯一一个 $Q$ -过程的充要条件是:

$$\langle (\lambda I - Q)y = 0, 0 \leq y \leq 1 \rangle$$

只有零解。

证 由定理4.4立即可得。

定义4.2. 称转强阵 $Q$ 是有法的, 如果 $\bar{P}(t)\mathbf{1} \equiv \mathbf{1}$ .

定理4.6. 设 $Q$ 是一个转强阵, 则

(i)  $Q$ 有法 $\Rightarrow Q$ -过程唯一;

(ii)  $Q$ 有法 $\iff \bar{y}(\lambda) = 0$ ;

(iii)  $Q$ 有法 $\Rightarrow Q$ 是保守的。

证 (i) 因为 $\bar{P}(t)$ 是最小的 $Q$ -过程, 所以由 $Q$ 有法可推出 $Q$ -过程是唯一的。

(ii) 因为

$$\bar{y}(\lambda) = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} (1 - \bar{P}(t)\mathbf{1}) dt,$$

所以

$$\bar{y}(\lambda) = 0 \iff (1 - \bar{P}(t)\mathbf{1}) = 0, [a.e.],$$

但是 $1 - \bar{P}(t)\mathbf{1}$ 对 $t$ 连续, 所以

$$\bar{y}(\lambda) = 0 \iff \bar{P}(t)\mathbf{1} = \mathbf{1}.$$

(iii) 若 $Q$ 是有法的, 则 $\bar{P}(t)$ 是转概阵, 而且 $\bar{P}'(0) = Q$ ,  $\bar{P}(t)$ 满足(B), 所以由定理3.7得知 $Q\mathbf{1} = 0$ . 即是 $Q$ 是保守的。

上面我们证明了对任意转强阵 $Q$ 来说, 其 $Q$ -过程的存在性, 及对保守的转强阵 $Q$ 来说, 其 $Q$ -过程唯一的充要条件. 下面我们将要给出对任意转强阵 $Q$ 来说, 其 $Q$ -过程唯一的充要条件, 以及当 $Q$ -过程不唯一时如何构造它们。

先研究两个空间:

$$\mathcal{L}_\lambda = \{a' : a' \in (l), a' \geq 0, a'(\lambda I - Q) = 0\}, \lambda > 0;$$

$$\mathcal{M}_\lambda = \{y : y \in (m), y \geq 0, (\lambda I - Q)y = 0\}, \lambda > 0.$$

其中 $(l)$ 、 $(m)$ 如第一篇代表定义在 $E$ 上的满足下述条件的全体行、

列向量:

$$\alpha' = (\alpha_i, i \in E) \in (l) \iff \sum_{i \in E} |\alpha_i| < \infty,$$

$$y = \left( y_i \right)_{i \in E} \in (m) \iff \sup_{i \in E} |y_i| < \infty.$$

以后我们把  $Q$ -过程  $P(t)$  的拉氏变换  $R(\lambda)$  也称作  $Q$ -过程。

**命题4.2.** 对任何转强阵  $Q$  有:

$$(1) \alpha' \geq 0, \alpha'(\lambda I - Q) \geq \beta' \geq 0 \Rightarrow \alpha' \geq \beta' \bar{R}(\lambda);$$

$$(2) y \geq 0, (\lambda I - Q)y \geq z \geq 0 \Rightarrow y \geq \bar{R}(\lambda)z.$$

**证** (1) 由  $\alpha' \geq 0, \alpha'(\lambda I - Q) \geq \beta' \geq 0$  得:

$$\alpha'(\lambda I + D_q) \geq \beta' + \alpha' S = \beta' + \alpha'(\lambda I + D_q) \Pi(\lambda).$$

反复地利用上述不等式得:

$$\alpha'(\lambda I + D_q) \geq \beta'$$

$$\alpha'(\lambda I + D_q) \geq \beta' + \beta' \Pi(\lambda),$$

.....

$$\alpha'(\lambda I + D_q) \geq \sum_{k=0}^n \beta' \Pi^k(\lambda), \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

$$\text{故 } \alpha' \geq \sum_{k=0}^n \beta' R_k(\lambda), \text{ 令 } n \rightarrow \infty \text{ 即得 } \alpha' \geq \beta' \bar{R}(\lambda).$$

(2) 由  $y \geq 0, (\lambda I - Q)y \geq z \geq 0$  得:

$$(\lambda I + D_q)y \geq z + Sy = z + (\lambda I + D_q)\Pi(\lambda)y,$$

仿(1)可证  $y \geq \bar{R}(\lambda)z$ .

$$\text{记 } A(\mu, \lambda) = I + (\mu - \lambda)\bar{R}(\lambda), \quad (\lambda, \mu > 0). \quad (4.8)$$

**注意:** 此处及此篇剩余部份希文  $\alpha, \beta, \dots$  上加一撇 “'” 代表行向量, 而  $P'(t)$  则往往代表微商, 请根据上下文判别它们的含义.

**命题4.3.** (1)  $\alpha' \in \mathcal{L}_\lambda \Rightarrow \alpha' A(\lambda, \mu) \in \mathcal{L}_\mu$ ;

(2)  $y \in \mathcal{M}_\lambda \Rightarrow A(\lambda, \mu)y \in \mathcal{M}_\mu$ .

**证** 只证一条, 其余类似. 设  $y \in \mathcal{M}_\lambda$ . 首先证明  $A(\lambda, \mu)y \geq 0$ .

事实上, 当 $\lambda \geq \mu$ , 有 $A(\lambda, \mu)y = [I + (\lambda - \mu)\bar{R}(\mu)]y \geq 0$ ; 当 $\lambda < \mu$ , 由 $(\lambda I - Q)y = 0$ 得 $(\mu I - Q)y = (\mu - \lambda)y \geq 0$ , 又因为 $y \geq 0$ , 所以用命题4.2得:  $y \geq \bar{R}(\mu)(\mu - \lambda)y$ , 因此

$$A(\lambda, \mu)y = y + (\lambda - \mu)\bar{R}(\mu)y \geq 0.$$

其次, 若注意 $A(\lambda, \mu) = I + (\lambda - \mu)\bar{R}(\lambda)$ ,  $y \in (m)$ ,  $\lambda \bar{R}(\lambda) \mathbf{1} \leq 1$ 可得 $A(\lambda, \mu)y \in (m)$ .

最后, 往证 $(\mu I - Q)(A(\lambda, \mu)y) = 0$ . 令 $c = \sup_{i \in E} |y_i|$ , 由 $\bar{R}(\mu)y \leq \frac{c}{\mu} \mathbf{1}$ 得,

$$(\mu I + D_q + S)(I + |\lambda - \mu|\bar{R}(\mu))y < \infty,$$

所以, 对 $(\mu I - Q)(A(\lambda, \mu)y)$ 可以施行结合律, 故

$$\begin{aligned} (\mu I - Q)(A(\lambda, \mu)y) &= ((\mu I - Q)A(\lambda, \mu))y \\ &= [(\mu I - Q) + (\lambda - \mu)(\mu I - Q)\bar{R}(\mu)]y \\ &= [\mu I - Q + (\lambda - \mu)I]y \\ &= (\lambda I - Q)y = 0. \end{aligned}$$

**命题4.4.**  $\mathcal{L}_\lambda(\mathcal{M}_\lambda)$ 的维数不依赖 $\lambda > 0$ , 故可记之为 $l^+(m^+)$ . ( $\mathcal{L}_\lambda$ 的维数理解为 $\mathcal{L}_\lambda$ 中极大线性无关向量组中向量的个数.)

**证** 设 $\alpha^{(1)'}$ ,  $\alpha^{(2)'}$ ,  $\dots$ ,  $\alpha^{(k)'}$ 线性无关, 且均属于 $\mathcal{L}_\lambda$ . 记 $\beta^{(i)'} = \alpha^{(i)'} A(\lambda, \mu)$ , ( $i = 1, \dots, k$ ). 由命题4.3知 $\beta^{(i)'} \in \mathcal{L}_\mu$ , ( $i = 1, \dots, k$ ). 若能 $\beta^{(1)'}$ ,  $\dots$ ,  $\beta^{(k)'}$ 线性无关, 则命题得证. 事实上, 若 $\sum_{i=1}^k C_i \beta^{(i)'} = 0$ , 则 $\sum_{i=1}^k C_i \beta^{(i)'} A(\mu, \lambda) = 0$ , 此即 $\sum_{i=1}^k C_i \alpha^{(i)'} = 0$ , 故由 $\alpha^{(1)'}$ ,  $\dots$ ,  $\alpha^{(k)'}$ 线性无关得 $C_i = 0$ , ( $i = 1, \dots, k$ ). 命题证毕.

**定理4.7.** 任给矩阵 $R(\lambda) = (r_{ij}(\lambda))_{i,j \in E}$ , ( $\lambda > 0$ ), 它是某一个准转概阵 $P(t)$ 的拉氏变换的充要条件是 $R(\lambda)$ 满足:

- (i) 正则化条件:  $R(\lambda) \geq 0$ ,  $\lambda R(\lambda) \mathbf{1} \leq \mathbf{1}$ , ( $\lambda > 0$ );
- (ii) 予解方程式:  $R(\lambda) - R(\mu) + (\lambda - \mu)R(\lambda)R(\mu) = 0$ , ( $\lambda, \mu > 0$ );

(iii) 连续性条件:  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda) = I$ .

证明请参见[48]定理2.4.

**定理4.8.**  $R(\lambda)$  是某一  $Q$ -过程的拉氏变换的充要条件是:  $R(\lambda)$  满足定理4.7的(i)、(ii)和

$$(iii)^* \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda(\lambda R(\lambda) - I) = Q.$$

**证** 用定理4.7, 为证定理4.8只须证明两点:

(1)  $(iii)^* \Rightarrow (iii)$ .

(2) 若  $R(\lambda)$  是准转概阵  $P(t)$  的拉氏变换, 则

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda(\lambda R(\lambda) - I) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} (P(t) - I).$$

事实上(1)显然成立。只证(2)。设  $R(\lambda) = (r_{i,j}(\lambda), i, j \in E)$  是准转概阵  $P(t) = (p_{i,j}(t), i, j \in E)$  的拉氏变换,  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} (P(t) - I) = (q_{i,j}, i, j \in E)$ .

先设  $0 \leq q_i < \infty$ , ( $q_i = -q_{i,i}$ )。则

$$\lambda^2 r_{i,i}(\lambda) - \lambda + q_i = \lambda^2 \int_0^\infty e^{-\lambda t} (p_{i,i}(t) - 1 + q_i t) dt.$$

任给  $\varepsilon > 0$ , 可取  $\delta > 0$ , 使

$$|p_{i,i}(t) - 1 + q_i t| < \varepsilon t, \quad (0 < t \leq \delta).$$

所以

$$\begin{aligned} |\lambda^2 r_{i,i}(\lambda) - \lambda + q_i| &\leq \varepsilon \int_0^\delta \lambda^2 t e^{-\lambda t} dt + \lambda^2 \int_\delta^\infty e^{-\lambda t} (1 + q_i t) dt \\ &\leq \varepsilon + \lambda^2 \int_\delta^\infty e^{-\lambda t} (1 + q_i t) dt. \end{aligned}$$

在上式中先令  $\lambda \rightarrow \infty$ , 次令  $\varepsilon \rightarrow 0$  即得

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} |\lambda^2 r_{i,i}(\lambda) - \lambda + q_i| = 0.$$

若  $q_i = \infty$ , 仿之可证:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} (\lambda - \lambda^2 r_{i,i}(\lambda)) = \infty.$$

总之, 恒有



$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda(r_{i,j}(\lambda) - 1) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{p_{i,j}(t) - 1}{t}, \quad (i \in E).$$

仿之可证:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^2 r_{i,j}(\lambda) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{p_{i,j}(t)}{t}, \quad (i \neq j).$$

**定理4.9.**  $R(\lambda)$ 是某个满足(B)((F))的Q—过程  $P(t)$ 的拉氏变换的充要条件是:  $R(\lambda)$ 满足定理4.7中的(i)、(ii)和(B<sub>1</sub>)((F<sub>1</sub>)).

**证** 充分性. 若  $R(\lambda)$ 满足(i)、(ii)和

$$(B_1): (\lambda I - Q)R(\lambda) = I, \quad (\lambda > 0),$$

则由  $\lambda R(\lambda)I \leq 1$  得知

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda QR(\lambda) = Q(\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda)) = Q.$$

因此, 从(B<sub>1</sub>)得(iii)\*, 用定理4.8, 充分性得证。

必要性. 用(B)  $\iff$  (B<sub>1</sub>)及定理4.8即得。

**命题4.5.** (1) 设  $z(\lambda) \geq 0$ ,  $z(\lambda) \in (m)$ , 令

$$\begin{cases} w_0(\lambda) = 0, \\ (\lambda I + D_q)w_{n+1}(\lambda) = z(\lambda) + Sw_n(\lambda), \quad (n \geq 0), \end{cases}$$

则当  $n \uparrow \infty$  时,  $w_n(\lambda) \uparrow R(\lambda)z(\lambda)$ .

(2) 设  $a'(\lambda) \geq 0$ ,  $a'(\lambda) \in (l)$ , 令

$$\begin{cases} \beta'_0(\lambda) = 0 \\ \beta'_{n+1}(\lambda)(\lambda I + D_q) = a'(\lambda) + \beta'_n(\lambda)S, \quad (n \geq 0), \end{cases}$$

则当  $n \uparrow \infty$  时,  $\beta'_n(\lambda) \uparrow a'(\lambda)\bar{R}(\lambda)$ .

(其中  $S = Q + D_q$  如定理4.1所定义,  $\bar{R}(\lambda)$  是最小 Q—过程的拉氏变换,  $a'(\lambda)$ ,  $\beta'_n(\lambda)$  表行向量。并不表示对  $\lambda$  求微商。)

**证** 令  $\bar{R}(\lambda)$ ,  $R_n(\lambda)$  分别表  $\bar{P}(t)$ ,  $P_n(t)$  之拉氏变换,  $S_n(\lambda)$

$$= \sum_{k=0}^n R_k(\lambda), \quad (n \geq 0), \text{ 定理4.3中已证:}$$

$$R_0(\lambda) = (\lambda I + D_q)^{-1}, \quad R_n(\lambda) = \Pi(\lambda)R_{n-1}(\lambda),$$

$$\Pi(\lambda) = (\lambda I + D_q)^{-1}S.$$

$$\text{所以} \quad (\lambda I + D_q)S_n(\lambda) = I + SS_{n-1}(\lambda),$$

$$S_n(\lambda)(\lambda I + D_q) = I + S_{n-1}(\lambda)S.$$

若令  $G_0(\lambda) = 0$ ,  $G_n(\lambda) = S_{n-1}(\lambda)$  ( $n \geq 1$ ), 则仍有

$$(a) \begin{cases} G_0(\lambda)z(\lambda) = 0, \\ (\lambda I + D_q)^{-1}G_{n+1}(\lambda)z(\lambda) = z(\lambda) + SG_n(\lambda)z(\lambda), \quad (n \geq 0), \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} a'(\lambda)G_0(\lambda) = 0, \\ a'(\lambda)G_{n+1}(\lambda)(\lambda I + D_q)^{-1} = a'(\lambda) + a'(\lambda)G_n(\lambda)S, \\ \quad (n \geq 0). \end{cases}$$

用(a), 由于  $n \uparrow \infty$  时  $G_n(\lambda)z(\lambda) \uparrow \bar{R}(\lambda)z(\lambda)$  及定义  $w_n(\lambda)$  的递推公式唯一决定了  $w_n(\lambda)$  可知:  $w_n(\lambda) \uparrow \bar{R}(\lambda)z(\lambda)$ 。仿之, 用(b)可得(2)。

命题4.6. 令

$$\Gamma = \left\{ a'(\lambda) \left| \begin{array}{l} 0 \leq a'(\lambda) \in (l), \\ a'(\mu) = a'(\lambda)A(\lambda, \mu), \quad \lambda > 0, \mu > 0 \end{array} \right. \right\},$$

$$\Gamma_1 = \left\{ a'(\lambda) \left| \begin{array}{l} a'(\lambda) = \beta' \bar{R}(\lambda) + \bar{a}'(\lambda), \quad \beta' \geq 0, \\ \beta' \bar{R}(\lambda) \in (l), \\ \bar{a}'(\lambda) \in \mathcal{L}, \quad \bar{a}'(\mu) = \bar{a}'(\lambda)A(\lambda, \mu), \\ \lambda > 0, \mu > 0 \end{array} \right. \right\}$$

$$Y = \left\{ y(\lambda) \left| \begin{array}{l} 0 \leq y(\lambda) \in (m), \\ y(\mu) = A(\lambda, \mu)y(\lambda), \quad \lambda > 0, \mu > 0 \end{array} \right. \right\},$$

$$Y_1 = \left\{ y(\lambda) \left| \begin{array}{l} y(\lambda) = \bar{R}(\lambda)z + \bar{y}(\lambda), \quad z \geq 0, \\ \bar{R}(\lambda)z \in (m), \\ \bar{y}(\lambda) \in \mathcal{M}, \quad \bar{y}(\mu) = A(\lambda, \mu)\bar{y}(\lambda), \\ \lambda > 0, \mu > 0 \end{array} \right. \right\}$$

则  $\Gamma_1 = \Gamma$ ,  $Y_1 = Y$ 。

注意: 此处  $a'(\lambda)$  并不表示对  $\lambda$  求导数, 只不过表示  $a'(\lambda)$  是含参数  $\lambda$  的定义在  $E$  上的行向量。

证 (1)  $Y_1 \subset Y$ 。由于  $\bar{R}(\lambda)$  满足予解方程式, 故  $A(\lambda, \mu) \cdot \bar{R}(\mu) = \bar{R}(\lambda)$ 。若  $z \geq 0$ ,  $\bar{R}(\lambda)z \in (m)$ , 则  $A(\lambda, \mu)(\bar{R}(\lambda)z)$

$$\begin{aligned}
&= (A(\lambda, \mu) \bar{R}(\lambda))z = \bar{R}(\mu)z. \text{ 所以, 任取 } y(\lambda) \\
&= (\bar{R}(\lambda)z + \tilde{y}(\lambda)) \in Y_1, \text{ 必有 } y(\lambda) \geq 0, y(\lambda) \in (m) \text{ 及} \\
&A(\lambda, \mu)y(\lambda) = A(\lambda, \mu)(\bar{R}(\lambda)z + \tilde{y}(\lambda)) \\
&= \bar{R}(\mu)z + \tilde{y}(\mu) = y(\mu), \quad (\lambda > 0, \mu > 0).
\end{aligned}$$

此即  $y(\lambda) \in Y$ .

(2)  $Y \subset Y_1$ . 任取  $y(\lambda) \in Y$ , 必有

$$0 \leq y(\lambda) = A(\mu, \lambda)y(\mu) = y(\mu) + (\mu - \lambda)\bar{R}(\lambda)y(\mu),$$

所以

$$\begin{aligned}
y(\mu) &\geq (\lambda - \mu)\bar{R}(\lambda)y(\mu) \\
&= \frac{1}{\lambda} \left[ \left(1 - \frac{\mu}{\lambda}\right) \lambda(\lambda\bar{R}(\lambda) - I)y(\mu) + (\lambda - \mu)y(\mu) \right],
\end{aligned}$$

于是

$$\mu y(\mu) \geq \left(1 - \frac{\mu}{\lambda}\right) \lambda(\lambda\bar{R}(\lambda) - I)y(\mu). \quad (4.9)$$

若注意  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda(\lambda\bar{R}(\lambda) - I) = Q$ , 在(4.9)中令  $\lambda \rightarrow \infty$  取极限, 并用法都引理可得,

$$\mu y(\mu) \geq Qy(\mu). \quad (4.10)$$

故可令

$$\mu y(\mu) = z(\mu) + Qy(\mu), \quad (0 \leq z(\mu) < \infty), \quad (4.11)$$

若再令

$$\begin{cases} w_0(\mu) = 0 \\ (\mu I + D_q)w_{n+1}(\mu) = z(\mu) + Sw_n(\mu), \quad (n \geq 0), \end{cases} \quad (4.12)$$

( $w_n$  是定义在  $E$  上的列向量,  $S = Q + D_q$  之定义见定理4.1) 比较(4.11)与(4.12)并用归纳法可证:

$$0 \leq w_n(\mu) \leq y(\mu), \quad (n \geq 0). \quad (4.13)$$

但是, 由(4.10)有

$$Sy(\mu) \leq (\mu I + D_q)y(\mu) < \infty,$$

又因为由命题4.5有:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_n(\mu) = v(\mu) = \bar{R}(\mu)z(\mu)$$

存在, 所以在(4.12)中令  $n \rightarrow \infty$  并用控制收敛定理可得

$$(\mu I + D_q)w(\mu) = z(\mu) + Sw(\mu),$$

亦即

$$\mu w(\mu) = z(\mu) + Qw(\mu). \quad (4.14)$$

由于  $y(\mu) \geq w(\mu) = \bar{R}(\mu)z(\mu)$ , 所以可令

$$y(\mu) = \bar{R}(\mu)z(\mu) + \tilde{y}(\mu), \quad (4.15)$$

其中  $z(\mu) \geq 0$ ,  $\bar{R}(\mu)z(\mu) \in (m)$ ,  $\tilde{y}(\mu) \geq 0$ ,  $\tilde{y}(\mu) \in (m)$ .

下面我们证明:  $z(\mu) = z$  与  $\mu > 0$  无关, 且  $\tilde{y}(\lambda)$  满足:  $\tilde{y}(\lambda) = A(\mu, \lambda)\tilde{y}(\mu)$ ,  $\tilde{y}(\mu) \in \mathcal{M}_\mu$ ,  $(\lambda > 0, \mu > 0)$ .

首先我们证明  $\tilde{y}(\mu) \in \mathcal{M}_\mu$ . 事实上, 由(4.11)、(4.14)、(4.15)得

$$\begin{aligned} Q\tilde{y}(\mu) &= \mu y(\mu) - z(\mu) - Qw(\mu) \\ &= \mu y(\mu) - \mu w(\mu) = \mu \tilde{y}(\mu). \end{aligned}$$

又因为  $\tilde{y}(\mu) \geq 0$ ,  $\tilde{y}(\mu) \in (m)$ , 所以  $\tilde{y}(\mu) \in \mathcal{M}_\mu$ .

其次我们证明(4.15)中的表示法唯一, 即

$$\begin{aligned} & \text{“}\bar{R}(\mu)z(\mu) + \tilde{y}(\mu) = 0, \tilde{y}(\mu) \in \mathcal{M}_\mu, \\ & \bar{R}(\mu)z(\mu) \in (m) \Rightarrow z(\mu) = \tilde{y}(\mu) = 0.” \end{aligned}$$

事实上, 若  $\bar{R}(\mu)z(\mu) + \tilde{y}(\mu) = 0$ , 由  $\tilde{y}(\mu) \in \mathcal{M}_\mu$  及  $\bar{R}(\mu)$  满足(B.)得知:

$$\begin{aligned} 0 &= (\mu I - Q)(\bar{R}(\mu)z(\mu) + \tilde{y}(\mu)) \\ &= (\mu I - Q)(\bar{R}(\mu)z(\mu)) \\ &= ((\mu I - Q)\bar{R}(\mu))z(\mu) = z(\mu), \end{aligned}$$

(注意上面施行的结合律是允许的, 证明仿命题4.3)也有  $\tilde{y}(\mu) = 0$ .

最后证明  $\tilde{y}(\lambda) = A(\mu, \lambda)\tilde{y}(\mu)$ , 且  $z(\mu) = z$  不依赖  $\mu > 0$ . 事实上由  $y(\lambda) \in Y$ , 若再注意(4.15)就有

$$\begin{aligned} y(\lambda) &= A(\mu, \lambda)y(\mu) \\ &= A(\mu, \lambda)(\bar{R}(\mu)z(\mu)) + A(\mu, \lambda)\tilde{y}(\mu) \\ &= \bar{R}(\lambda)z(\mu) + A(\mu, \lambda)\tilde{y}(\mu). \end{aligned} \quad (4.16)$$

因为  $\bar{y}(\mu) \in \mathcal{M}_1$ , 所以, 用命题4.3得

$$A(\mu, \lambda) \bar{y}(\mu) \in \mathcal{M}_1.$$

但是  $\bar{R}(\lambda)z(\mu) = A(\mu, \lambda) (\bar{R}(\mu)z(\mu)) \in (m)$ ,

$$\text{且 } y(\lambda) = \bar{R}(\lambda)z(\lambda) + \bar{y}(\lambda), \quad (4.17)$$

比较(4.16)、(4.17)并注意(4.15)中表示法唯一可得

$$z(\mu) = z \quad \text{与 } \mu > 0 \text{ 无关,}$$

$$\text{且 } \bar{y}(\lambda) = A(\mu, \lambda) \bar{y}(\mu).$$

总之, 我们证明了  $y(\lambda) \in Y_1$ .

仿之可证  $\Gamma = \Gamma_1$ .

**定理4.10.** (满足(F)的Q—过程的构造) 设Q是任一无法转强阵(否则Q—过程唯一, 定理4.3已构造出来了), 则

(I) 若  $l^+ = 0$ , 则满足(F)的Q—过程恰有一个, 它就是  $\bar{P}(t)$ .

(II) 若  $l^+ > 0$ , 任取  $\alpha'(\lambda) \in \mathcal{L}_1$ ,  $\alpha'(\lambda) \neq 0$ , 则

$$R(\lambda) = \bar{R}(\lambda) + \bar{y}(\lambda)\alpha'(\lambda)/(c + \lambda\alpha'(\lambda)1)$$

是一个满足(F)的Q—过程, 其中  $c$  是非负实数,  $\bar{R}(\lambda)$ ,  $\bar{y}(\lambda)$  之意义如前. 且  $R(\lambda)$  是不断的充要条件是  $c = 0$ .

(III) 若  $l^+ = 1$ , 则全部满足(F)的Q—过程是一切下述形式的  $R(\lambda)$ :

$$R(\lambda) = \bar{R}(\lambda) + m_\lambda y(\lambda) \alpha'(\lambda),$$

$$y(\lambda) \in Y, \quad (Y\text{之定义见命题4.6}),$$

$$\alpha'(\lambda) \in \mathcal{L}_1, \quad \alpha'(\lambda) \neq 0,$$

$$m_\lambda \text{ 满足: } m_\mu = m_\lambda [1 + (\lambda - \mu)m_\mu \alpha'(\lambda)y(\mu)],$$

$$0 \leq m_\lambda,$$

$$m_\lambda y(\lambda) \leq y(\lambda) / \lambda \alpha'(\lambda) 1, \quad (\text{当 } \alpha'(\lambda) \neq 0 \text{ 时}).$$

且此时恰有一个满足(F)的不断的Q—过程, 就是

$$R(\lambda) = \bar{R}(\lambda) + \bar{y}(\lambda)\alpha'(\lambda) / \lambda \alpha'(\lambda) 1.$$

(IV) 若  $l^+ = k > 1$ , 令  $\alpha'_1(\lambda), \dots, \alpha'_k(\lambda)$  是  $\mathcal{L}_1$  的一组极大线性无关向量, 取  $y_1(\lambda), \dots, y_k(\lambda) \in Y$ , 令

$$t_{l,j}(\lambda, \mu) = \alpha'_l(\lambda) y_j(\mu), \quad l = 1, \dots, k, \quad j = 1, \dots, J,$$

$$T(\lambda, \mu) = (t_{j,l}(\lambda, \mu) | j=1, \dots, J, l=1, \dots, k).$$

若  $M(\lambda) = (m_{j,l}(\lambda), j=1, \dots, k, l=1, \dots, J)$  满足

$$M(\mu) = (I + (\lambda - \mu)M(\mu)T(\lambda, \mu))M(\lambda), \quad (\lambda > 0, \mu > 0),$$

而且

$$0 \leq \sum_{s=1}^J \left( \sum_{j=1}^k \lambda a'_j(\lambda) 1 m_{j,s}(\lambda) \right) y_s(\lambda) \leq \bar{y}(\lambda),$$

则

$$R(\lambda) = \bar{R}(\lambda) + \sum_{j=1}^k \left( \sum_{s=1}^J m_{j,s}(\lambda) y_s(\lambda) \right) a'_j(\lambda)$$

是满足  $(F)$  的  $Q$ -过程。

**证** (I) 设  $l^+ = 0$ . 任取一个满足  $(F_1)$  的  $Q$ -过程  $R(\lambda)$ , 必有  $(R(\lambda) - \bar{R}(\lambda))(\lambda I - Q) = 0$ ,  $R(\lambda) - \bar{R}(\lambda) \geq 0$ ,  $(R(\lambda) - \bar{R}(\lambda))1 \leq \frac{1}{\lambda}$ ,  $(\lambda > 0)$ , 此即  $R(\lambda) - \bar{R}(\lambda)$  之任一行都属于  $\mathcal{L}_1$ , 由  $l^+ = 0$  得

$R(\lambda) = \bar{R}(\lambda)$ , (I) 得证.

(II) 设  $l^+ > 0$ . 任取  $a'(\lambda) \in \mathcal{L}_1$ ,  $a'(\lambda) \neq 0$ ,  $R(\lambda) = \bar{R}(\lambda) + \bar{y}(\lambda)a'(\lambda)/(c + \lambda a'(\lambda)1)$ ,  $(c \geq 0)$ , 显然有  $0 \leq R(\lambda)$ ,  $\lambda R(\lambda)1 \leq 1$  ( $\lambda R(\lambda)1 = 1 \iff c = 0$ ), 再用  $a'(\lambda) \in \mathcal{L}_1$  及  $\bar{R}(\lambda)$  满足  $(F_1)$  知  $R(\lambda)(\lambda I - Q) = I$ , 即  $R(\lambda)$  满足  $(F_1)$ , 最后, 由  $\bar{R}(\lambda)$  满足预解方程及  $a'(\lambda) \in \mathcal{L}_1$  可得:

$$(\mu - \lambda)\bar{R}(\lambda)\bar{y}(\mu) = y(\lambda) - \bar{y}(\mu),$$

$$(\mu - \lambda)a'(\lambda)\bar{R}(\mu) = a'(\lambda) - a'(\mu),$$

$$(\mu - \lambda)a'(\lambda)\bar{y}(\mu) = (\mu a'(\mu) - \lambda a'(\lambda))1,$$

总上三式可知  $R(\lambda)$  满足预解方程式, 故由定理 4.9 知  $R(\lambda)$  是满足  $(F_1)$  之  $Q$ -过程.

(III) 设  $l^+ = 1$ . 取定  $a'(\lambda) \in \mathcal{L}_1$ ,  $a'(\lambda) \neq 0$ . 任取满足  $(F_1)$  的  $Q$ -过程  $R(\lambda)$ , 由  $(R(\lambda) - \bar{R}(\lambda))(\lambda I - Q) = 0$  及  $l^+ = 1$  知 (注意  $a'(\lambda)1 > 0$ ):

$$R(\lambda) - \bar{R}(\lambda) = z(\lambda)a'(\lambda), \quad (z(\lambda) \geq 0, z(\lambda) \in (m)). \quad (4.18)$$

用定理4.9, 欲(4.18)确定的 $R(\lambda)$ 是满足 $(F_1)$ 的 $Q$ -过程的充要条件是 $R(\lambda)$ 满足 $0 \leq \lambda R(\lambda) 1 \leq 1$ 及予解方程式, 而 $\bar{R}(\lambda)$  满足予解方程式, 故 $R(\lambda)$ 满足予解方程式的充要条件是:

$$\begin{aligned} & z(\lambda) \alpha'(\lambda) - z(\mu) \alpha'(\mu) + (\lambda - \mu) (\bar{R}(\lambda) z(\mu) \alpha'(\mu) \\ & \quad + z(\lambda) \alpha'(\lambda) z(\mu) \alpha'(\mu) + z(\lambda) \alpha'(\lambda) \bar{R}(\mu)) \\ & = 0. \end{aligned}$$

亦即

$$\begin{aligned} & z(\lambda) (\alpha'(\lambda) + (\lambda - \mu) \alpha'(\lambda) \bar{R}(\mu)) \\ & = (I + (\mu - \lambda) \bar{R}(\lambda)) z(\mu) \alpha'(\mu) \\ & \quad + (\mu - \lambda) z(\lambda) \alpha'(\lambda) z(\mu) \alpha'(\mu). \end{aligned}$$

若注意 $A(\lambda, \mu) = I + (\lambda - \mu) \bar{R}(\mu)$ ,  $\alpha'(\lambda) A(\lambda, \mu) = \alpha'(\mu)$ , 上式即:

$$\begin{aligned} & z(\lambda) \alpha'(\mu) = (A(\mu, \lambda) z(\mu) \\ & \quad + (\mu - \lambda) z(\lambda) \alpha'(\lambda) z(\mu)) \alpha'(\mu). \end{aligned}$$

由于 $\alpha'(\mu) \neq 0$ , 所以上式即

$$z(\lambda) = A(\mu, \lambda) z(\mu) + (\mu - \lambda) z(\lambda) \alpha'(\lambda) z(\mu),$$

此即

$$z(\lambda) (1 + (\lambda - \mu) \alpha'(\lambda) z(\mu)) = A(\mu, \lambda) z(\mu).$$

若令

$$z(\lambda) = m_\lambda y(\lambda), \quad m_\lambda \geq 0, \quad 0 \leq y(\lambda) \in (m),$$

则上式又等价于

$$\begin{cases} y(\lambda) = A(\mu, \lambda) y(\mu), & (\text{即 } y(\lambda) \in Y), \\ m_\lambda (1 + (\lambda - \mu) \alpha'(\lambda) m_\mu y(\mu)) = m_\mu. \end{cases}$$

由于 $\bar{R}(\lambda) \geq 0$ ,  $z(\lambda) \geq 0$ ,  $\alpha'(\lambda) \geq 0$ , 所以 $R(\lambda)$ 满足正则化条件 $0 \leq \lambda R(\lambda) 1 \leq 1$ 等价于

$$\begin{aligned} & m_\lambda \geq 0 \\ & m_\lambda y(\lambda) \leq \frac{\bar{y}(\lambda)}{\lambda \alpha'(\lambda) 1}. \end{aligned}$$

注意: 由于 $m_\lambda - m_\mu = (\mu - \lambda) \alpha'(\lambda) y(\mu) m_\lambda m_\mu$  ( $\lambda > 0$ ,  $\mu > 0$ ), 所以

$m_i$  或则恒为0或则恒大于0.

(IV) 设  $l^+ = k > 1$ ,  $\alpha'_1(\lambda), \dots, \alpha'_k(\lambda)$  是  $\mathcal{L}_i$  的一个极大线性无关向量组. 对任何一个满足  $(F_i)$  的  $Q$ -过程  $R(\lambda)$ , 必有  $(R(\lambda) - \bar{R}(\lambda))(M - Q) = 0$ , 从而

$$R(\lambda) = \bar{R}(\lambda) + \sum_{i=1}^k z_i(\lambda) \alpha'_i(\lambda). \quad (4.19)$$

由于 (4.19) 确定的  $R(\lambda)$  必满足  $(F_i)$ , 所以 (4.19) 确定之  $R(\lambda)$  是一个满足  $(F_i)$  的  $Q$ -过程的充要条件是  $R(\lambda)$  满足  $0 \leq \lambda R(\lambda) 1 \leq 1$  及予解方程式. 由  $\bar{R}(\lambda)$  满足予解方程式得知  $R(\lambda)$  满足予解方程式的充要条件是:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^k z_i(\lambda) \alpha'_i(\lambda) - \sum_{i=1}^k z_i(\mu) \alpha'_i(\mu) \\ & + (\lambda - \mu) \left[ \bar{R}(\lambda) \sum_{i=1}^k z_i(\mu) \alpha'_i(\mu) \right. \\ & + \left( \sum_{i=1}^k z_i(\lambda) \alpha'_i(\lambda) \right) \left( \sum_{i=1}^k z_i(\mu) \alpha'_i(\mu) \right) \\ & \left. + \sum_{i=1}^k z_i(\lambda) \alpha'_i(\lambda) \bar{R}(\mu) \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.20)$$

下面只在  $(m)$  中定  $z_i(\lambda)$  (这可保证下面施行的结合律合法), (4.20) 即

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^k z_i(\lambda) \alpha'_i(\lambda) A(\lambda, \mu) - A(\mu, \lambda) \sum_{i=1}^k z_i(\mu) \alpha'_i(\mu) \\ & + (\lambda - \mu) \left( \sum_{i=1}^k z_i(\lambda) \alpha'_i(\lambda) \right) \left( \sum_{i=1}^k z_i(\mu) \alpha'_i(\mu) \right) \\ & = 0. \end{aligned} \quad (4.21)$$

由  $\alpha'_i(\lambda) A(\lambda, \mu) = \alpha'_i(\mu)$  知 (4.21) 等价于:



$$\sum_{i=1}^k \left[ z_i(\lambda) - A(\mu, \lambda) z_i(\mu) + (\lambda - \mu) \left( \sum_{l=1}^k z_l(\lambda) \alpha'_l(\lambda) \right) z_i(\mu) \right] \alpha'_i(\mu) = 0. \quad (4.22)$$

由  $\{\alpha'_i(\mu), j=1, \dots, k\}$  是极大线性无关向量组知 (4.22) 等价于:

$$z_j(\lambda) - A(\mu, \lambda) z_j(\mu) + (\lambda - \mu) \sum_{l=1}^k z_l(\lambda) \alpha'_l(\lambda) z_j(\mu) = 0, \\ (j=1, \dots, k), \quad (4.23)$$

即是

$$\sum_{l=1}^k z_l(\lambda) [\delta_{j,l} + (\lambda - \mu) \alpha'_l(\lambda) z_j(\mu)] \\ = A(\mu, \lambda) z_j(\mu), \quad (j=1, \dots, k). \quad (4.24)$$

若令

$$z_l(\lambda) = \sum_{s=1}^J m_{l,s}(\lambda) y_s(\lambda), \quad 0 \leq y_s(\lambda) \in (m), \\ b_{j,l}(\lambda, \mu) = \delta_{j,l} + (\lambda - \mu) \alpha'_l(\lambda) \sum_{r=1}^J m_{j,r}(\mu) y_r(\mu), \\ (j=1, \dots, k, l=1, \dots, J)$$

则 (4.24) 化为

$$\sum_{s=1}^J y_s(\lambda) \left( \sum_{l=1}^k b_{j,l}(\lambda, \mu) m_{l,s}(\lambda) \right) \\ = \sum_{s=1}^J m_{j,s}(\mu) A(\mu, \lambda) y_s(\mu), \quad (j=1, \dots, k), \quad (4.25)$$

故

$$\begin{cases} y_s(\lambda) = A(\mu, \lambda) y_s(\mu), & (0 \leq y_s(\lambda) \in (m), s=1, \dots, J), \\ \sum_{l=1}^k b_{j,l}(\lambda, \mu) m_{l,s}(\lambda) = m_{j,s}(\mu), & \left( \begin{matrix} j=1, \dots, k \\ s=1, \dots, J \end{matrix} \right), \end{cases} \quad (4.26)$$

所确定的  $y_s(\lambda)$ ,  $m_{l,s}(\lambda)$ , ( $j=1, \dots, k$ ,  $s=1, \dots, J$ ) 必满足 (4.25). 令

$$\begin{aligned} t_{l,j}(\lambda, \mu) &= \alpha'_j(\lambda) y_j(\mu), \quad j=1, \dots, J, \quad l=1, \dots, k, \\ T(\lambda, \mu) &= (t_{l,j}(\lambda, \mu), \quad j=1, \dots, J, \quad l=1, \dots, k), \\ B(\lambda, \mu) &= (b_{l,j}(\lambda, \mu), \quad j=1, \dots, k, \quad l=1, \dots, k), \\ M(\lambda) &= (m_{l,j}(\lambda), \quad j=1, \dots, k, \quad l=1, \dots, J), \end{aligned}$$

则 (4.26) 化为

$$\begin{cases} y_s(\lambda) = A(\mu, \lambda) y_s(\mu), \quad 0 \leq y_s(\lambda) \in (m), \quad s=1, \dots, J, \\ M(\mu) = B(\lambda, \mu) M(\lambda) = (I + (\lambda - \mu) M(\mu) T(\lambda, \mu)) M(\lambda), \end{cases} \quad (4.27)$$

而  $0 \leq \lambda R(\lambda) 1 \leq 1$  等价于

$$0 \leq \sum_{j=1}^k z_j(\lambda) (\lambda \alpha'_j(\lambda) 1) \leq \bar{y}(\lambda),$$

此即

$$0 \leq \sum_{s=1}^J \left( \sum_{j=1}^k \lambda \alpha'_j(\lambda) 1 m_{j,s}(\lambda) \right) y_s(\lambda) \leq \bar{y}(\lambda).$$

(IV) 证毕.

**定理 4.11.** 对任何转强阵  $Q$  来说,

(1) 满足 (F) 的  $Q$ -过程或者恰有一个或者有无穷多个, 且恰有一个的充要条件是下列两条件中有一成立:

(a)  $Q$  有法;

(b)  $l^+ = 0$ .

(2) 满足 (F) 的不断的  $Q$ -过程或者没有, 或者恰有一个, 或者有无穷多个, 而且

(a)  $Q$  无法且  $l^+ > 1 \implies$  有无穷多个;

(b)  $Q$  保守且  $Q$ -过程唯一, 或者  $l^+ = 1 \implies$  恰有一个;

(c)  $l^+ = 0$  且  $Q$ -过程不唯一  $\implies$  没有.

**证** (1) 若  $Q$  有法, 则恰有唯一一个  $Q$ -过程, 它就是  $\bar{P}(t)$ ,

且  $\bar{P}(t)$  是不断的, 满足 (B)、(F)。若  $Q$  无法, 且  $l^+ = 0$ , 由定理 4.10(I), 恰有唯一一个满足 (F) 的  $Q$ —过程。若  $Q$  无法, 且  $l^+ > 0$ , 由定理 4.10(II) 知: 有无穷多个满足 (F) 的  $Q$ —过程。

(2) 由定理 4.10(II) 知: 当  $l^+ > 0$  时

$$R(\lambda) = \bar{R}(\lambda) + \frac{\bar{y}(\lambda)\alpha'(\lambda)}{\lambda\alpha'(\lambda)\mathbf{1}}, \quad (\alpha'(\lambda) \in \mathcal{L}_1, \alpha'(\lambda) \neq 0)$$

都是不断的且满足 (F) 的  $Q$ —过程。若  $l^+ > 1$ , 可取  $\alpha'_1(\lambda), \alpha'_2(\lambda) \in \mathcal{L}_1$ ,  $\alpha'_1(\lambda)$  与  $\alpha'_2(\lambda)$  线性无关, 定义  $\alpha'_{a,b}(\lambda) = a\alpha'_1(\lambda) + b\alpha'_2(\lambda)$ , ( $a, b$  是不同为 0 的非负数), 则

$$R_{a,b}(\lambda) = \bar{R}(\lambda) + \frac{\bar{y}(\lambda)\alpha'_{a,b}(\lambda)}{\lambda\alpha'_{a,b}(\lambda)\mathbf{1}}$$

是满足 (F) 的不断的  $Q$ —过程。而当  $Q$  无法且  $l^+ > 1$  时这样的  $R_{a,b}(\lambda)$  有无穷多个 (因这时有  $\bar{y}(\lambda) \neq 0$ , 所以只要  $\alpha'_{a,b}(\lambda)$  与  $\alpha'_{c,d}(\lambda)$  线性无关, 必有  $R_{a,b}(\lambda) \neq R_{c,d}(\lambda)$ , 而由  $\alpha'_1(\lambda)$  与  $\alpha'_2(\lambda)$  线性无关知  $\alpha'_{1,1}(\lambda), \alpha'_{1,2}(\lambda), \dots$  中任取二个都线性无关)。

又由定理 4.10 知: 当  $l^+ = 1$  时恰有一个满足 (F) 的不断的  $Q$ —过程, 当  $l^+ = 0$  时满足 (F) 的  $Q$ —过程恰有一个。

总之, 不断的且满足 (F) 的  $Q$ —过程或者没有或者恰有一个或者有无穷多个, 而且

(a)  $Q$  无法且  $l^+ > 1 \implies$  有无穷多个;

(b)  $l^+ = 1 \implies$  恰有一个。

又因为

(c)  $l^+ = 0$  且  $Q$ —过程不唯一  $\implies l^+ = 0$  且  $Q$  无法  $\implies$  恰有唯一一个满足 (F) 的  $Q$ —过程  $\bar{P}(t)$  且  $\bar{P}(t)\mathbf{1} \neq \mathbf{1} \implies$  没有满足 (F) 的不断的  $Q$ —过程。因此, 再证明“ $Q$  保守且  $Q$  过程唯一  $\implies$  恰有一个满足 (F) 的不断的  $Q$ —过程”, 则定理证毕。而当  $Q$  保守时, 不断的  $Q$ —过程恒存在 (命题 4.7 将证明) 再用  $Q$ —过程唯一知  $\bar{P}(t)$  就是这个满足 (F) 且不断的  $Q$ —过程。

**命题 4.7.** 设  $Q$  是保守的转强阵, 则

(1) 每个  $Q$ —过程  $P(t)$  都满足 (B);

(2) 不断的  $Q$ —过程恒存在.

证 (1) 如命题 4.1, 考虑  $E_\Delta = E \cup \{\Delta\}$ ,  $\Delta \in E$ ,

$$\tilde{P}(t) = \begin{matrix} \Delta & E \\ E \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d(t) & P(t) \end{pmatrix}, \quad d(t) = 1 - P(t)1,$$

由命题 4.1 有,  $\left(\frac{d}{dt} d(t)\right)\Big|_{t=0}$  为非负实数, 再注意

$$Q1 + \left(\frac{d}{dt} d(t)\right)\Big|_{t=0} \leq 0, \quad Q1 = 0 \text{ 得,}$$

$$\left(\frac{d}{dt} (d(t))\right)\Big|_{t=0} = 0.$$

亦即

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \sum_{\substack{j \neq i \\ j \in E}} \frac{p_{i,j}(t)}{t} = -q_{i,i} = \sum_{\substack{j \neq i \\ j \in E}} q_{i,j}, \quad (i \in E),$$

所以由本节前部的准转概阵之性质 (VII) 得知  $P(t)$  满足 (B).

(2) 若  $Q$  有法, 则  $\bar{R}(\lambda)$  就是不断的  $Q$ —过程. 若  $Q$  无法,  $R(\lambda) = \bar{R}(\lambda) + \bar{y}(\lambda)\alpha'(\lambda)\bar{R}(\lambda)/\lambda\alpha'(\lambda)\bar{R}(\lambda)1$  就是不断的  $Q$ —过程 (只须取  $\alpha'(\lambda) = e'_i$  即可).

**命题 4.8.** 令  $\alpha'(\lambda) \in \Gamma$ ,  $y(\lambda) \in Y$ , 则  $\lambda \uparrow \infty$  时  $\alpha'(\lambda) \downarrow 0$ ,  $y(\lambda) \downarrow 0$ .  $\Gamma$  及  $Y$  的定义见命题 4.6 (注意  $\bar{y}(\lambda) \in Y$ ,  $e'_i \bar{R}(\lambda) \in \Gamma$ ).

**证** 任取  $\lambda > \mu > 0$ , 由  $\alpha'(\mu) = \alpha'(\lambda)A(\lambda, \mu)$ ,  $\alpha'(\lambda) \geq 0$  得:  
 $\alpha'(\mu) - \alpha'(\lambda) = (\lambda - \mu)\alpha'(\lambda)\bar{R}(\mu) \geq 0$ , 即  $\alpha'(\lambda)$  对  $\lambda$  非升, 故可令  
 $\bar{\alpha}' = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \alpha'(\lambda)$ . 谬设存在  $i \in E$ , 使  $\bar{\alpha}'e_i > 0$  (即  $\bar{\alpha}'$  的第  $i$  个分量大

于 0), 则当  $\lambda > \mu$  时有:

$$\begin{aligned} \alpha'(\mu)e_i &= \alpha'(\lambda)e_i + (\lambda - \mu)\alpha'(\lambda)\bar{R}(\mu)e_i \\ &\geq (\lambda - \mu)(e'_i[\alpha'(\lambda)e_i])\bar{R}(\mu)e_i \\ &\geq (\lambda - \mu)\bar{\alpha}'e_i(e'_i\bar{R}(\mu)e_i), \end{aligned}$$

而  $\bar{\alpha}' e_i (e_i' \bar{R}(\mu) e_i) > 0$ , 故在上式中令  $\lambda \rightarrow \infty$  得  $\alpha'(\mu) e_i = \infty$ , 此为不可能, 故  $\bar{\alpha}' = 0$ .

**命题4.9.** 任给转强阵  $Q$ , 若

$$\inf_{i \in E} (e_i' \lambda_0 \bar{R}(\lambda_0) \mathbf{1}) = 0, \quad (\lambda_0 > 0),$$

则存在不断的  $Q$ -过程.

**证** 令  $R(\lambda) = \bar{R}(\lambda) + \bar{y}(\lambda) \alpha'(\lambda) / \lambda \alpha'(\lambda) \mathbf{1}$ ,  $\alpha'(\lambda) = \beta' \bar{R}(\lambda) \neq 0$ ,  $\beta' \geq 0$ ,  $\beta' \mathbf{1} = \infty$ ,  $\beta' \bar{R}(\lambda) \mathbf{1} < \infty$ , 往证  $R(\lambda)$  是不不断的  $Q$ -过程. 事实上,

(1) 显然有  $R(\lambda) \geq 0$ ,  $\lambda R(\lambda) \mathbf{1} = \mathbf{1}$ ;

(2) 注意  $\bar{y}(\lambda) \in Y$ ,  $\alpha'(\lambda) = \beta' \bar{R}(\lambda) \in \Gamma$ , 有

$$\bar{y}(\lambda) \alpha'(\lambda) = \bar{y}(\lambda) A(\mu, \lambda) \alpha'(\mu) = \bar{y}(\mu) \alpha'(\mu),$$

所以若令  $m_\lambda = \lambda \alpha'(\lambda) \mathbf{1}$ , 则由  $\bar{R}(\lambda)$  满足予解方程可得

$$\begin{aligned} & R(\lambda) - R(\mu) + (\lambda - \mu) R(\lambda) R(\mu) \\ &= \frac{\bar{y}(\lambda) \alpha'(\lambda)}{m_\lambda} - \frac{\bar{y}(\mu) \alpha'(\mu)}{m_\mu} \\ &+ (\lambda - \mu) \left[ \frac{\bar{y}(\lambda) \alpha'(\lambda) \bar{R}(\mu)}{m_\lambda} + \frac{\bar{R}(\lambda) \bar{y}(\mu) \alpha'(\mu)}{m_\mu} \right. \\ &+ \left. \frac{\bar{y}(\lambda) \alpha'(\lambda) \bar{y}(\mu) \alpha'(\mu)}{m_\lambda m_\mu} \right] = \frac{1}{m_\lambda} \bar{y}(\lambda) \alpha'(\lambda) A(\lambda, \mu) \\ &- \frac{1}{m_\mu} A(\mu, \lambda) \bar{y}(\mu) \alpha'(\mu) \\ &+ \frac{(\lambda - \mu) \alpha'(\lambda) \bar{y}(\mu)}{m_\lambda m_\mu} \bar{y}(\lambda) \alpha'(\mu) \\ &= \left( \frac{1}{m_\lambda} - \frac{1}{m_\mu} + \frac{(\lambda - \mu) \alpha'(\lambda) \bar{y}(\mu)}{m_\lambda m_\mu} \right) \bar{y}(\lambda) \alpha'(\mu). \end{aligned}$$

但是  $(\lambda - \mu) \alpha'(\lambda) \bar{R}(\mu) = -(\alpha'(\lambda) - \alpha'(\mu))$ , 故

$$\frac{1}{m_\lambda} - \frac{1}{m_\mu} + \frac{(\lambda - \mu) \alpha'(\lambda) \bar{y}(\mu)}{m_\lambda m_\mu}$$

$$\begin{aligned}
&= (\mu a'(\mu) - \lambda a'(\lambda) + (\lambda - \mu)a'(\lambda)(I - \mu \bar{R}(\mu)))1 \cdot \frac{1}{m_\lambda m_\mu} \\
&= (\mu a'(\mu) - \lambda a'(\lambda) + (\lambda - \mu)a'(\lambda) + \mu(a'(\lambda) - a'(\mu)))1 \\
&\quad \cdot \frac{1}{m_\lambda m_\mu} = 0.
\end{aligned}$$

此即  $R(\lambda)$  满足予解方程。

(3) 由于  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda(\lambda \bar{R}(\lambda) - I) = Q$ , 若能证

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^2 \bar{y}(\lambda) a'(\lambda) / m_\lambda = 0,$$

则  $R(\lambda)$  就是不断的  $Q$ —过程了。事实上, 由命题 4.8 有:  $\lambda \uparrow \infty$  时  $\bar{y}(\lambda) \downarrow 0$ , 故若令  $d = -Q1 \geq 0$ , 由  $(\lambda I - Q)\bar{y}(\lambda) = (\lambda I - Q)(1 - \lambda \bar{R}(\lambda)1) = d$  可得:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \bar{y}(\lambda) = d.$$

又  $\lambda a'(\lambda) = \lambda \beta' \bar{R}(\lambda) = \beta'(I + \bar{R}(\lambda)Q) = \beta' + a'(\lambda)Q$ , 且由命题 4.8 当  $\lambda \uparrow \infty$  时  $a'(\lambda) \downarrow 0$ , 故

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda a'(\lambda) = \beta'.$$

总之由  $\beta'1 = \infty$  得:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^2 \bar{y}(\lambda) a'(\lambda) / m_\lambda = d\beta' / \beta'1 = 0.$$

由定理的条件, 存在  $k_1, k_2, \dots, (k_i \in E)$  使  $e'_k; \bar{R}(\lambda_0)1 < \frac{1}{2^i}$ ,

取  $\beta'$  使  $j = k_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) 时,  $\beta' e_j$  为 1 否则为 0, 这样的  $\beta'$  就满足  $\beta'1 = \infty, \beta' \bar{R}(\lambda_0)1 < \infty$ , 再用  $\beta' \bar{R}(\lambda) = \beta' \bar{R}(\lambda_0)A(\lambda_0, \lambda)$  得  $\beta' \bar{R}(\lambda)1 < \infty$  (一切  $\lambda > 0$ ), 命题证毕。

**命题 4.10.** 设  $Q$  是  $E$  上任一转强阵,  $\Delta \in E, E_\Delta = E \cup \{\Delta\}$ , 令

$$\bar{Q} = \begin{matrix} & \Delta & E \\ \begin{matrix} \Delta \\ E \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -Q1 & Q \end{pmatrix} \end{matrix}$$

是保守转强阵。若  $\bar{P}(t)$  是任一  $\bar{Q}$ —过程 (必满足 (B)),  $P(t) =$

$\tilde{P}(t)$  on  $E$ , 则  $P(t)$  必是一个满足 (B) 的  $Q$ -过程.

证 若令  $\tilde{Q} = (\tilde{q}_{i,j}, i, j \in E_A)$ ,  $\tilde{P}(t) = (\tilde{p}_{i,j}(t), i, j \in E_A)$ , 则由  $\tilde{q}_{A,A} = 0$  及准转概率性质 (III) 得  $\tilde{p}_{A,A}(t) \geq e^{\tilde{q}_{A,A}t} = 1$  ( $t \geq 0$ ), 再注意  $P(t) = \tilde{P}(t)$  on  $E$  得:

$$\tilde{P}(t) = \begin{array}{c} \Delta \quad E \\ E \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b(t) & P(t) \end{pmatrix}.$$

所以

- (1)  $P(t) \geq 0, P(t)1 \leq 1$ ;
- (2)  $\lim_{t \rightarrow 0+} P(t) = I$ ;
- (3)  $P(s+t) = \tilde{P}(s+t)$  on  $E = P(s)P(t)$ ;
- (4)  $P'(0) = \tilde{P}'(0)$  on  $E = Q$ ;
- (5)  $P'(t) = \tilde{P}'(t)$  on  $E = (\tilde{Q} \tilde{P}(t))$  on  $E = QP(t)$ .

总之,  $P(t)$  是一个满足 (B) 的  $Q$ -过程. (注意此处  $\tilde{P}'(t)$ 、 $P'(t)$  均表  $\tilde{P}(t)$ 、 $P(t)$  对  $t$  的微商.)

由此命题看出: 满足 (B) 的  $Q$  (任意) 一过程的构造, 可归结为  $\tilde{Q}$ -过程的构造, 而  $Q$  是保守的.

**定理 4.12.** 设  $Q$  是保守转强阵,

(I) 若  $m^+ = 0$ , 则  $Q$ -过程唯一, 它就是  $\bar{R}(\lambda)$ ,

(II) 设  $m^+ > 0$ , 令

$$\mathscr{D} = \left\{ R(\lambda) \mid R(\lambda) = \bar{R}(\lambda) + \frac{\bar{y}(\lambda)\beta' \bar{R}(\lambda)}{c + \lambda\beta' \bar{R}(\lambda)1} \right\},$$

$$\left. \begin{array}{l} c \geq 0, \beta' \geq 0, \beta' \text{ 与 } c \text{ 不同时为 } 0, \\ \beta' \bar{R}(\lambda) \in (1), \lambda > 0 \end{array} \right\},$$

$$\mathscr{D}_1 = \left\{ R(\lambda) \mid R(\lambda) = \bar{R}(\lambda) + \frac{\bar{y}(\lambda)\alpha'(\lambda)}{c + \lambda\alpha'(\lambda)1} \right\},$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha'(\lambda) \in \Gamma = \Gamma_1, c \geq 0, \\ \alpha'(\lambda) \text{ 与 } c \text{ 不同时为 } 0 \end{array} \right\},$$

则  $\mathscr{D} \subset \mathscr{D}_1$ ,  $\mathscr{D}_1$  是一族满足  $(B_\lambda)$  的  $Q$ -过程,  $c=0$  的充要条件是它所对应的  $Q$ -过程  $R(\lambda)$  不断. 当  $m^+ = 1$  时,  $\mathscr{D}_1$  就是全部  $Q$ -过程了. 此外, 当  $\beta' \neq 0$  时  $\mathscr{D}$  中所对应的  $Q$ -过程不满足  $(F_\lambda)$ .

证 (I) 由定理 4.5 立得.

(II) 由  $\Gamma$  之定义即得  $\mathscr{D} \subset \mathscr{D}_1$ , 再证  $\mathscr{D}_1$  是一族满足  $(B_\lambda)$  的  $Q$ -过程.

首先证明: 当  $m^+ > 0$  (从而  $\bar{y}(\lambda) \neq 0$ ) 时

$$R(\lambda) = \bar{R}(\lambda) + \bar{y}(\lambda)\gamma'(\lambda), 0 \leq \gamma'(\lambda) \in (I), \gamma'(\lambda) \neq 0, \quad (4.28)$$

确定一个满足  $(B_\lambda)$  的  $Q$ -过程的充要条件是

$$\begin{cases} \gamma'(\lambda) = m_\lambda a'(\lambda), & a'(\lambda) \in \Gamma, \\ m_\lambda = (c + \lambda a'(\lambda)1)^{-1}, & c \geq 0, c \text{ 与 } a'(\lambda) \text{ 不同时为 } 0. \end{cases} \quad (4.29)$$

事实上, (4.28) 中之  $R(\lambda)$  必满足  $(B_\lambda)$ , 故  $R(\lambda)$  是满足  $(B_\lambda)$  的  $Q$ -过程的充要条件是

$$(a) \quad 0 \leq \lambda R(\lambda) 1 \leq 1,$$

$$(b) \quad R(\lambda) - R(\mu) + (\lambda - \mu)R(\lambda)R(\mu) = 0.$$

由  $\bar{R}(\lambda)$  满足予解方程知 (b) 等价于

$$\begin{aligned} & \bar{y}(\lambda)\gamma'(\lambda) - \bar{y}(\mu)\gamma'(\mu) + (\lambda - \mu)(\bar{R}(\lambda)\bar{y}(\mu)\gamma'(\mu) \\ & + \bar{y}(\lambda)\gamma'(\lambda)R(\mu) + \bar{y}(\lambda)\gamma'(\lambda)\bar{y}(\mu)\gamma'(\mu)) = 0, \end{aligned}$$

注意  $A(\lambda, \mu)\bar{y}(\lambda) = \bar{y}(\mu)$ , 上式化为:

$$\begin{aligned} & \bar{y}(\lambda)\gamma'(\lambda)A(\lambda, \mu) = \bar{y}(\lambda)\gamma'(\mu) \\ & + (\mu - \lambda)\bar{y}(\lambda)\gamma'(\lambda)\bar{y}(\mu)\gamma'(\mu). \end{aligned}$$

但是  $\bar{y}(\lambda) \neq 0$ , 所以上式又等价于

$$\gamma'(\lambda)A(\lambda, \mu) = [1 + (\mu - \lambda)\gamma'(\lambda)\bar{y}(\mu)]\gamma'(\mu), (\lambda, \mu > 0). \quad (4.30)$$

固定  $\lambda_0 > 0$ , 令  $\gamma'(\lambda_0) = m_{\lambda_0} a'(\lambda_0)$ ,  $m_{\lambda_0} \geq 0$ ,  $a'(\lambda_0) \geq 0$ ,  $a'(\lambda_0) \in (I)$ ,  $a'(\lambda) = a'(\lambda_0)A(\lambda_0, \lambda)$ , ( $\lambda > 0$ ). 则 (4.30) 等价于



$$\begin{cases} \gamma'(\lambda) = m_1 \alpha'(\lambda), & (4.31) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_\lambda = [1 + (\mu - \lambda)m_1 (\alpha'(\lambda)\bar{y}(\mu))]m_\mu, (\lambda, \mu > 0), & (4.32) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha'(\lambda) \in \Gamma, & (4.33) \end{cases}$$

再令  $\sigma(\lambda, \mu) = \alpha'(\lambda)\bar{y}(\mu)$ , 则(4.32) 化为

$$m_\lambda - m_\mu = (\mu - \lambda)m_\lambda m_\mu \sigma(\lambda, \mu), (\lambda, \mu > 0), \quad (4.34)$$

由(4.34)看出  $m_\lambda$  或则恒为0或则无处为0 (对  $\lambda > 0$ ), 而  $\gamma'(\lambda) \neq 0$ , 所以  $m_\lambda > 0$ , ( $\lambda > 0$ ). 因此, 用  $m_\lambda m_\mu$  除(4.34) 两边得:

$$m_\lambda^{-1} - \mu\sigma(\lambda, \mu) = m_\mu^{-1} - \lambda\sigma(\lambda, \mu), \quad (4.35)$$

又因为  $\alpha'(\lambda)\bar{y}(\mu) = \alpha'(\mu)A(\mu, \lambda)\bar{y}(\mu) = \alpha'(\mu)\bar{y}(\lambda)$ , 所以(4.35) 即

$$m_\mu^{-1} - \mu\sigma(\mu, \lambda) = m_\lambda^{-1} - \lambda\sigma(\lambda, \mu),$$

亦即

$$m_\mu^{-1} - \mu\alpha'(\mu)(1 - \lambda\bar{R}(\lambda)) = m_\lambda^{-1} - \lambda\alpha'(\lambda)(1 - \mu\bar{R}(\mu)), \quad \text{而}$$

$\alpha'(\mu)\bar{R}(\lambda) = \alpha'(\lambda)\bar{R}(\mu)$ , 所以上式即

$$m_\lambda^{-1} - \lambda\alpha'(\lambda)\mathbf{1} = c \quad (\text{不依赖 } \lambda > 0). \quad (4.36)$$

亦即

$$m_\lambda = (c + \lambda\alpha'(\lambda)\mathbf{1})^{-1}, \quad (\lambda > 0). \quad (4.37)$$

显然

$$R(\lambda) = \bar{R}(\lambda) + \frac{\bar{y}(\lambda)\alpha'(\lambda)}{c + \lambda\alpha'(\lambda)\mathbf{1}}$$

满足  $0 \leq \lambda R(\lambda)\mathbf{1} \leq \mathbf{1}$  的充要条件是  $c \geq 0$ , 且  $c = 0$  的充要条件是  $\lambda R(\lambda)\mathbf{1} = \mathbf{1}$ .

总之, 我们证明了: (4.28) 定义的  $R(\lambda)$  是满足  $(B_\lambda)$  的  $Q$ -过程的充要条件是 (4.29) 成立. 且  $R(\lambda)$  不断的充要条件是  $c = 0$ .

如能再证明两点: (1)  $\mathscr{D}$  中之  $R(\lambda)$  不满足  $(F_\lambda)$ , (2) 当  $m^+ = 1$  时, 任一  $Q$ -过程均能表示成 (4.28) 的形状, 则定理证毕.

(1) 任取  $R(\lambda) \in \mathscr{D}$ ,

$$\begin{aligned} & R(\lambda)(\lambda I - Q) \\ &= I + (c + \lambda\beta'\bar{R}(\lambda)\mathbf{1})^{-1}\bar{y}(\lambda)\beta'\bar{R}(\lambda)(\lambda I - Q) \end{aligned}$$

$$=I+(c+\lambda\beta'\bar{R}(\lambda)1)^{-1}\bar{y}(\lambda)\beta'\neq I.$$

(2) 若 $m^+=1$ , 任取一个 $Q$ -过程 $R(\lambda)$ , 必满足 $(B_1)$ , 故

$$(\lambda I-Q)(R(\lambda)-\bar{R}(\lambda))=0.$$

由 $m^+=1$ ,  $\bar{y}(\lambda)\neq 0$ ,  $\bar{y}(\lambda)\in\mathcal{M}_1$ , 得知

$$R(\lambda)=\bar{R}(\lambda)+\bar{y}(\lambda)\gamma'(\lambda), \quad 0\leq\gamma'(\lambda)\in(I).$$

**命题4.11.** (1) 若 $R(\lambda)$ 是满足 $(F_1)$ 的 $Q$ -过程, 则 $\{e'_i R(\lambda), i\in E\}$ 线性无关, 即

$$\sum_{i\in E} c_i e'_i R(\lambda)=0 \implies c_i=0, \quad (i\in E).$$

(2) 若 $R(\lambda)$ 是满足 $(B_1)$ 的 $Q$ -过程, 则 $\{R(\lambda)e_i, i\in E\}$ 线性无关.

**证** (1) 设 $R(\lambda)(\lambda I-Q)=I$ , 若 $\sum_{i\in E} c_i e'_i R(\lambda)=0$ , ( $c_i$ 是实数,

$i\in E$ ), 令 $E_0=\{i|i\in E, c_i\geq 0\}$ ,  $E_1=\{i|i\in E, c_i<0\}$ . 由 $R(\lambda)(\lambda I-Q)=I$ 得:

$$R(\lambda)=(R(\lambda)S+I)(\lambda I+D_q)^{-1},$$

( $S=Q+D_q$ ,  $D_q$ 之定义见定理4.3), 所以

$$\begin{aligned} & \sum_{i\in E_s} (-1)^s c_i e'_i R(\lambda) \\ &= \sum_{i\in E_s} (-1)^s c_i e'_i (R(\lambda)S+I)(\lambda I+D_q)^{-1}, \quad (s=0, 1), \end{aligned} \tag{4.38}$$

由

$$\sum_{i\in E} c_i e'_i R(\lambda)=0 \quad (\text{与求和次序无关}), \tag{4.39}$$

得

$$0\leq \sum_{i\in E_0} c_i e'_i R(\lambda) = \sum_{i\in E_1} (-c_i) e'_i R(\lambda) < \infty. \tag{4.40}$$

由  $0 \leq \sum_{i \in E} (-1)^i c_i e'_i (\lambda I + D_q)^{-1} < \infty$  得,

$$0 \leq \sum_{i \in E} (-1)^i c_i e'_i R(\lambda) S(\lambda I + D_q)^{-1} < \infty, \quad (s=0, 1),$$

(4.41)

由 (4.39)、(4.40)、(4.41) 得,

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in E} c_i e'_i (\lambda I + D_q)^{-1} \\ &= \sum_{i \in E} \left[ c_i e'_i R(\lambda) - c_i e'_i R(\lambda) S(\lambda I + D_q)^{-1} \right] = 0. \end{aligned}$$

故  $\sum_{i \in E} c_i e'_i = 0$ , 从而  $c_i = 0 \quad (i \in E)$ .

(2) 仿(1) 可证.

系1.  $\{\bar{R}(\lambda)e_i, i \in E\}, \{e'_i \bar{R}(\lambda), i \in E\}$  皆线性无关.

证 因为  $(\lambda I - Q)\bar{R}(\lambda) = \bar{R}(\lambda)(\lambda I - Q) = I$ .

**命题4.12.** 若  $Q$  保守,  $m^+ > 0$ , 则有无穷多个不断的满足  $(B_1)$  的  $Q$ -过程, 也有无穷多个间断的满足  $(B_1)$  的  $Q$ -过程.

证 由定理4.12,

$$R^{(n)}(\lambda) = \bar{R}(\lambda) + \frac{\bar{y}(\lambda)e'_n \bar{R}(\lambda)}{\lambda e'_n \bar{R}(\lambda)1}, \quad (n \in E)$$

是不断的满足  $(B_1)$  的  $Q$ -过程, 由命题4.12  $\{e'_n \bar{R}(\lambda), n \in E\}$  是线性无关的, 又  $\bar{y}(\lambda) \neq 0$ , 所以  $n \neq m \implies R^{(n)}(\lambda) \neq R^{(m)}(\lambda)$ . 因此上面给出的  $Q$ -过程有无穷多个. 仿之

$$R^{(n)*}(\lambda) = \bar{R}(\lambda) + \frac{\bar{y}(\lambda)e'_n \bar{R}(\lambda)}{c - \lambda e'_n \bar{R}(\lambda)1}, \quad (n \in E) \quad c > 0,$$

给出了无穷多个满足  $(B_1)$  的间断的  $Q$ -过程.

**定理4.13.** 任给转强阵  $Q$ . (1) 满足  $(B_1)$  的  $Q$ -过程恒存在,

且或者恰有一个或者有无穷多个, 恰有一个的充要条件是  $m^+ = 0$ .  
 (2) 满足  $(B_1)$  的不断的  $Q$ -过程或者没有或者恰有一个或者有无穷多个, 此外,

(a)  $Q$  非保守  $\implies$  满足  $(B_1)$  的不断的  $Q$ -过程不存在;

(b)  $Q$  保守,  $m^+ = 0 \implies$  满足  $(B_1)$  的不断的  $Q$ -过程恰有一个;

(c)  $Q$  保守,  $m^+ > 0 \implies$  满足  $(B_1)$  的不断的  $Q$ -过程有无穷多个.

证 (1) 显然由定理 4.3 满足  $(B_1)$  的  $Q$ -过程恒存在. 若  $m^+ = 0$ , 且设  $R(\lambda)$  是任一满足  $(B_1)$  之  $Q$ -过程, 则  $(\lambda I - Q) \cdot (R(\lambda) - \bar{R}(\lambda)) = 0$ , 由  $0 \leq \lambda(R(\lambda) - \bar{R}(\lambda))e_j \leq 1$  ( $j \in E$ ) 得  $R(\lambda) \equiv \bar{R}(\lambda)$ , 即满足  $(B_1)$  之  $Q$ -过程唯一. 若  $m^+ > 0$ , 作

$$\bar{Q} = \begin{matrix} \Delta & E \\ \Delta & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -Q1 & Q \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad (\Delta \in E),$$

则  $\bar{Q}$  是保守转强阵, 且由  $m^+ > 0$  知

$$\ll (\lambda I - \bar{Q})y = 0, \quad 0 \leq y \leq 1 \gg$$

有非 0 解:

$$y = \begin{matrix} \Delta \\ E \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y^* \end{pmatrix}, \quad y^* \neq 0, \quad y^* \in \mathcal{M}_1.$$

故由命题 4.12 有无穷多个满足  $(B)$  的不断的  $\bar{Q}$ -过程  $\{\tilde{P}^{(j)}(t), j \in J\}$ ,  $J$  是无穷集. 由命题 4.10 若令  $P^{(j)}(t) = \tilde{P}^{(j)}(t)$  on  $E$ , 则  $\tilde{P}^{(j)}(t)$  必有下述形状:

$$\tilde{P}^{(j)}(t) = \begin{matrix} \Delta & E \\ \Delta & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 - P^{(j)}(t)1 & P^{(j)}(t) \end{pmatrix} \end{matrix},$$

且  $P^{(j)}(t)$  是满足  $(B)$  的  $Q$ -过程. 显然

$$\tilde{P}^{(j)}(t) \neq \tilde{P}^{(k)}(t) \implies P^{(j)}(t) \neq P^{(k)}(t),$$

所以  $\{P^{(j)}(t), j \in J\}$  是无穷多个满足 (B) 的  $Q$ -过程。

(2) (a) 设  $Q$  非保守, 由定理 3.7 满足  $(B_1)$  的不断的  $Q$ -过程  $R(\lambda)$  不存在,

(b) 若  $Q$  保守,  $m^+ = 0$ , 由定理 4.5 及命题 4.7 得知恰有一个满足  $(B_1)$  的不断的  $Q$ -过程,

(c) 若  $Q$  保守,  $m^+ > 0$ , 由命题 4.12 知满足  $(B_1)$  的不断的  $Q$ -过程有无穷多个, 定理证毕。

**定理 4.14.**<sup>1)</sup> 对任何转强阵  $Q$ ,  $Q$ -过程唯一的充要条件是:

(1)  $\inf_{i \in E} (e'_i \lambda \bar{R}(\lambda) 1) = f(\lambda) > 0, (0 < \lambda < \infty);$

(2)  $l^+ = 0$ , 或者  $Q$  有法。

关于条件 (1), 我们指出两点:

(a) 条件 (1) 等价于下列形式上较弱的

(1)'  $\inf_{i \in E} (e'_i \lambda_0 \bar{R}(\lambda_0) 1) = f(\lambda_0) > 0, (\text{对某个 } 0 < \lambda_0 < \infty).$

事实上, 当  $0 < \lambda < \lambda_0$  时, 由  $\bar{R}(\lambda)$  对  $\lambda$  非升得  $f(\lambda) \geq \inf_{i \in E} (e'_i \lambda \bar{R}(\lambda_0) 1) = \frac{\lambda}{\lambda_0} f(\lambda_0) > 0$ . 当  $\lambda \geq \lambda_0$  时, 由命题 4.8 有  $f(\lambda) \geq f(\lambda_0) > 0$ .

(b) 条件 (1) 蕴含了  $m^+ = 0$ .

事实上, 由  $\bar{R}(\lambda)$  满足  $(B_1)$  可知  $\bar{R}(\lambda) e_j, (j \in E)$  是  $\ll (M - Q)y = e_j, y \geq 0 \gg$  的最小解。(显然  $\bar{R}(\lambda) e_j$  是解, 若  $y$  也是解, 再令  $S = Q + D_p, \Pi(\lambda) = (M + D_p)^{-1} S, R_k(\lambda) = \Pi^k(\lambda) (M + D_p)^{-1}, \bar{R}(\lambda)$

$= \sum_{k=0}^{\infty} R_k(\lambda)$  的意义如定理 4.3, 则有  $y = \Pi(\lambda)y + (M + D_p)^{-1} e_j$ ,

故  $y \geq (M + D_p)^{-1} e_j = R_0(\lambda) e_j$ , 对  $k$  作归纳法可证  $y \geq \sum_{s=0}^k R_s(\lambda) e_j$ ,

故  $y \geq R(\lambda) e_j$ .) 仿之,  $\lambda R(\lambda) 1$  是  $\ll (M - Q)y = \lambda 1, y \geq 0 \gg$  的最小

1) 本定理来自文献[21], 为了便于读者, 其证明也详细转述了。

解. 若  $m^+ > 0$ , 即  $\langle (M - Q)y = 0, 0 \leq y \leq 1 \rangle$  有非解  $y^*$ , 则  $\lambda \bar{R}(\lambda)1 - \frac{f(\lambda)}{2}y^*$  是

$$\langle (M - Q)y = \lambda 1, y \geq 0 \rangle$$

之解, 由  $\lambda \bar{R}(\lambda)1$  是最小解知  $\frac{f(\lambda)}{2}y^* = 0$ , 而  $y^* \neq 0$ , 故  $f(\lambda) = 0$ .

现在我们来证明定理.

必要性. 若  $l^+ > 0$ , 且  $Q$  无法, 则由定理 4.11 知满足 (F) 的  $Q$ -过程有无穷多个. 若  $\inf_{i \in E} (e'_i \lambda \bar{R}(\lambda)1) = f(\lambda) = 0$ , 则由命题 4.9 知: 存在  $\alpha'(\lambda) = \beta' \bar{R}(\lambda) \neq 0$ ,  $\beta' \geq 0$ ,  $\beta'1 = \infty$ ,  $\alpha'(\lambda)1 < \infty$ , 使  $R(\lambda) = \bar{R}(\lambda) + \bar{y}(\lambda)\alpha'(\lambda)/\lambda\alpha'(\lambda)1$  是不断的  $Q$ -过程, 故  $\lambda R(\lambda)1 = 1$ , 而由  $\inf_{i \in E} (e'_i \lambda \bar{R}(\lambda)1) = 0$  得知  $\lambda \bar{R}(\lambda)1 \neq 1$ , 所以找出了二个不等的  $Q$ -过程.

充分性. 设条件 (1)、(2) 成立, 任取一个  $Q$ -过程  $R(\lambda)$ , 往证  $R(\lambda) = \bar{R}(\lambda)$ . 由定理 4.1(i)', 直接计算有

$$R(\lambda) \geq (M + D_q)^{-1}(I + SR(\lambda)), \quad (4.42)$$

由  $\bar{R}(\lambda)$  满足  $(B_1)$  有:

$$\bar{R}(\lambda) = (M + D_q)^{-1}(I + S\bar{R}(\lambda)), \quad (4.43)$$

所以

$$R(\lambda) - \bar{R}(\lambda) \geq (M + D_q)^{-1}S(R(\lambda) - \bar{R}(\lambda)). \quad (4.44)$$

令  $S(\lambda) = (M + D_q)^{-1}S$  是准转移阵, 则 (4.44) 说明  $R(\lambda) - \bar{R}(\lambda)$  的每一行  $e'_i(R(\lambda) - \bar{R}(\lambda))$  ( $i \in E$ ) 都是  $S(\lambda)$ -盈测. 显然  $e'_i S(\lambda)e_i = 0$  ( $i \in E$ ),  $\sum_{i \in E} 2^{-(i+1)}(r_{i,j}(\lambda) - \bar{r}_{i,j}(\lambda)) \leq \sum_{i \in E} 2^{-(i+1)} < \infty$ ,

( $j \in E$ ), (其中  $r_{i,j}(\lambda) = e'_i R(\lambda)e_j$ ,  $\bar{r}_{i,j}(\lambda) = e'_i \bar{R}(\lambda)e_j$ ), 又由条件 (1) 知  $m^+ = 0$ , 所以, 由 [71] 有

$$R(\lambda) = \bar{R}(\lambda) + \bar{R}(\lambda)F(\lambda), \quad (F(\lambda) \geq 0). \quad (4.45)$$

由  $0 \leq \lambda R(\lambda)1 \leq 1$ ,  $0 \leq \lambda \bar{R}(\lambda)1 \leq 1$  得

$$\lambda \bar{R}(\lambda) F(\lambda) \mathbf{1} \leqslant \mathbf{1},$$

再注意  $\lambda e_i' \bar{R}(\lambda) e_i > 0$  可得

$$F(\lambda) \mathbf{1} < \infty. \quad (4.46)$$

若仍记  $A(\lambda, \mu) = I + (\lambda - \mu) \bar{R}(\mu)$ , 则有

$$A(\lambda, \mu) \bar{R}(\lambda) = \bar{R}(\mu), \quad A(\lambda, \nu) A(\nu, \mu) = A(\lambda, \mu).$$

由于  $R(\lambda)$ 、 $\bar{R}(\lambda)$  均满足予解方程式, 把(4.45)代入  $R(\lambda) - R(\mu) + (\lambda - \mu) R(\lambda) R(\mu) = 0$  可得:

$$\begin{aligned} & \bar{R}(\lambda) F(\lambda) - \bar{R}(\mu) F(\mu) + (\lambda - \mu) [\bar{R}(\lambda) \bar{R}(\mu) F(\mu) + \\ & \bar{R}(\lambda) F(\lambda) \bar{R}(\mu) + \bar{R}(\lambda) F(\lambda) \bar{R}(\mu) F(\mu)] = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{此即} \quad & -A(\mu, \lambda) \bar{R}(\mu) F(\mu) + \bar{R}(\lambda) F(\lambda) A(\lambda, \mu) \\ & + (\lambda - \mu) \bar{R}(\lambda) F(\lambda) \bar{R}(\mu) F(\mu) = 0, \end{aligned}$$

亦即

$$\begin{aligned} & -\bar{R}(\lambda) F(\mu) + \bar{R}(\lambda) F(\lambda) A(\lambda, \mu) \\ & + (\lambda - \mu) \bar{R}(\lambda) F(\lambda) \bar{R}(\mu) F(\mu) = 0. \end{aligned}$$

用命题4.11由上式可得:

$$-F(\mu) + F(\lambda) A(\lambda, \mu) + (\lambda - \mu) F(\lambda) \bar{R}(\mu) F(\mu) = 0,$$

亦即

$$F(\lambda) A(\lambda, \mu) = F(\mu) + (\mu - \lambda) F(\lambda) \bar{R}(\mu) F(\mu). \quad (4.47)$$

由(4.47)、 $F(\lambda) \geqslant 0$ ,  $\bar{R}(\lambda) \geqslant 0$  及  $A(\lambda, \mu) = I + (\lambda - \mu) \bar{R}(\mu)$  可证:

$$F(\lambda) A(\lambda, \mu) \geqslant 0, \quad (\lambda > 0, \mu > 0).$$

由(4.46)有

$$F(\lambda) A(\lambda, \mu) \mathbf{1} = F(\mu) \mathbf{1} + (\mu - \lambda) F(\lambda) \bar{R}(\mu) F(\mu) \mathbf{1}. \quad (4.48)$$

而  $F(\lambda) R(\mu) \mathbf{1} = F(\lambda) \bar{R}(\mu) \mathbf{1} + F(\lambda) \bar{R}(\mu) F(\mu) \mathbf{1}$ , 但

$$F(\lambda) R(\mu) \mathbf{1} \leqslant \frac{1}{\mu} F(\lambda) \mathbf{1} < \infty, \quad (\lambda > 0, \mu > 0,)$$

故

$$F(\lambda) \bar{R}(\mu) \mathbf{1} < \infty, \quad F(\lambda) \bar{R}(\mu) F(\mu) \mathbf{1} < \infty. \quad (4.49)$$

由(4.46)、(4.48)、(4.49)得,

$$F(\lambda)A(\lambda, \mu)1 < \infty, (\lambda > 0, \mu > 0). \quad (4.50)$$

暂固定 $\lambda > 0$ , 令

$$G_\lambda(\mu) = F(\lambda)A(\lambda, \mu) \geq 0, \quad (4.51)$$

则由 $A(\lambda, \mu)A(\mu, \nu) = A(\lambda, \nu)$ 可得:

$$G_\lambda(\mu)A(\mu, \nu) = G_\lambda(\nu). \quad (4.52)$$

(4.50)–(4.52)说明 $G_\lambda(\mu)$ 的任一行 $e'_i G_\lambda(\mu)$  ( $i \in E$ )都属于 $\Gamma = \Gamma_1$  ( $\Gamma, \Gamma_1$ 之定义见命题4.6). 若 $Q$ 有法, 当然 $Q$ -过程唯一, 充分性证毕. 若 $Q$ 无法, 则由条件(2)知: 必有 $l^+ = 0$ , 即 $\mathcal{L}_1$ 只有0解, 于是由 $\Gamma_1$ 的定义可知:

$$G_\lambda(\mu) = B(\lambda)\bar{R}(\mu), \quad B(\lambda) \geq 0, \quad B(\lambda)\bar{R}(\mu)1 < \infty. \quad (4.53)$$

所以

$$G_\lambda(\mu)(\mu I - Q) = B(\lambda)\bar{R}(\mu)(\mu I - Q) = B(\lambda). \quad (4.54)$$

(上面使用结合律是合法的, 因为 $\bar{R}(\mu)S < \infty$ , 证明见定理4.3)在(4.53)、(4.54)中取 $\lambda = \mu$ , 并注意(4.51)可得:

$$F(\lambda) = G_\lambda(\lambda) = B(\lambda)\bar{R}(\lambda), \quad (4.55)$$

$$F(\lambda)(\lambda I - Q) = B(\lambda). \quad (4.56)$$

在(4.47)两边右乘以 $(\mu I - Q)$ 并注意 $\bar{R}(\lambda)$ 满足 $(F_\lambda)$ 及 $A(\lambda, \mu)$ 之定义再用(4.56)可得

$$B(\lambda) = B(\mu) + (\mu - \lambda)F(\lambda)\bar{R}(\mu)B(\mu). \quad (4.57)$$

由  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda(\lambda R(\lambda) - I) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda(\lambda \bar{R}(\lambda) - I) = Q$ ,

并用(4.45)可得  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^2 \bar{R}(\lambda)F(\lambda) = 0$ ,

但  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \bar{R}(\lambda) = I$ ,  $\bar{R}(\lambda) \geq 0$ ,  $F(\lambda) \geq 0$ , 故

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda F(\lambda) = 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} F(\lambda) = 0. \quad (4.58)$$

而由(4.57)知:  $\lambda_1 \geq \lambda_2 > 0 \implies B(\lambda_1) \leq B(\lambda_2)$ . 故



$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} B(\lambda) \quad (4.59)$$

存在且有限。而(4.56)即是

$$F(\lambda)(\lambda I + D_q) = F(\lambda)S + B(\lambda), \quad (4.60)$$

所以由(4.58)—(4.60)得,

$$B(\lambda) \downarrow 0, \quad (\lambda \uparrow \infty). \quad (4.61)$$

如能证明 $B(\lambda) = 0$ ,  $(\lambda > 0)$ , 则由(4.45)及(4.55)知 $R(\lambda) = \bar{R}(\lambda)$ , 即 $Q$ -过程唯一。

由(4.46)及(4.55)及定理的条件(1)有

$$\begin{aligned} \infty &> \lambda F(\lambda)1 = \lambda B(\lambda)\bar{R}(\lambda)1 \geq f(\lambda)(B(\lambda)1), \\ B(\lambda)1 &< \frac{\lambda}{f(\lambda)} F(\lambda)1 < \infty, \quad (\lambda > 0). \end{aligned} \quad (4.62)$$

从而由 $\bar{R}(\lambda)$ 满足予解方程式可得:

$$\begin{aligned} (\mu - \lambda)F(\lambda)\bar{R}(\mu) &= (\mu - \lambda)B(\lambda)\bar{R}(\lambda)\bar{R}(\mu) \\ &= B(\lambda)(\bar{R}(\lambda) - \bar{R}(\mu)) = B(\lambda)\bar{R}(\lambda) - B(\lambda)\bar{R}(\mu). \end{aligned} \quad (4.63)$$

又由(4.45), (4.62)及定理条件(1)有

$$\begin{aligned} 1 &\geq \mu R(\mu)1 = \mu \bar{R}(\mu)1 + \mu \bar{R}(\mu)F(\mu)1 \\ &\geq f(\mu)1 + f(\mu)\bar{R}(\mu)B(\mu)1, \quad (\mu > 0). \end{aligned} \quad (4.64)$$

所以

$$\bar{R}(\mu)B(\mu)1 \leq \left( \frac{1}{f(\mu)} - 1 \right) 1, \quad (\mu > 0). \quad (4.65)$$

由(4.62), (4.65)得,

$$B(\lambda)\bar{R}(\mu)B(\mu)1 \leq \left( \frac{1}{f(\mu)} - 1 \right) B(\lambda)1 < \infty. \quad (4.66)$$

由(4.57), (4.62), (4.63), (4.66)得

$$\begin{aligned} B(\lambda)1 &= B(\mu)1 + (\mu - \lambda)F(\lambda)\bar{R}(\mu)B(\mu)1 \\ &= B(\mu)1 + B(\lambda)(R(\lambda) - \bar{R}(\mu))B(\mu)1 \end{aligned}$$

$$= B(\mu)1 + B(\lambda)\bar{R}(\lambda)B(\mu)1 - B(\lambda)\bar{R}(\mu)B(\mu)1 \quad (4.67)$$

由(4.62)、(4.66)可知上式右边三项都是有限的, 故由  $B(\mu) \downarrow 0$  (当  $\mu \uparrow \infty$ ), 并用控制收敛定理可得:

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} (B(\mu)1) = (\lim_{\mu \rightarrow \infty} B(\mu))1 = 0, \quad (4.68)$$

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} (B(\lambda)\bar{R}(\lambda)B(\mu)1) = B(\lambda)\bar{R}(\lambda)(\lim_{\mu \rightarrow \infty} B(\mu)1) = 0, \quad (4.69)$$

若再注意  $\bar{R}(\mu) \downarrow 0$  (当  $\mu \uparrow \infty$ ), 再用(4.68)及控制收敛定理可得

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} (B(\lambda)\bar{R}(\mu)B(\mu)1) = B(\lambda)(\lim_{\mu \rightarrow \infty} \bar{R}(\mu)B(\mu)1) = 0. \quad (4.70)$$

在(4.67)中令  $\mu \rightarrow \infty$ , 并注意(4.68)–(4.70)得  $B(\lambda)1 = 0$ , ( $\lambda > 0$ ), 此即  $B(\lambda) = 0$ , ( $\lambda > 0$ ). 定理证毕.

下面我们改变研究主题. 设  $Q$  是有法的转强阵, 从而  $Q$ -过程唯一, 它就是最小  $Q$ -过程  $\bar{P}(t)$ . 有些情况, 我们对  $\bar{P}(t)$  并不感兴趣, 只对

$$\bar{\Pi} = \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{P}(t)$$

感兴趣. 如何通过  $Q$ , 而不经中间对象  $\bar{P}(t)$  直接求出  $\bar{\Pi}$ ?

**引理4.1.** 设  $g(y)$  是  $[0, \infty)$  上的非负实值函数, 在  $[0, A]$  上勒贝格可积, ( $A$  为任意实数), 令

$$f(x) = \int_0^{\infty} e^{-xy} g(y) dy, \quad (x > 0),$$

若  $\lim_{y \rightarrow \infty} g(y) = g(\infty)$  存在且有限, 则  $\lim_{x \rightarrow 0+} xf(x) = g(\infty)$ ,

若  $\lim_{y \rightarrow 0+} g(y) = g(0+)$  存在且有限, 则  $\lim_{x \rightarrow \infty} xf(x) = g(0+)$ .

**证** 因为

$$xf(x) - g(\infty) = x \int_0^{\infty} e^{-xy} (g(y) - g(\infty)) dy,$$

所以任给  $\varepsilon > 0$ , 可取  $A > 0$ , 使  $|g(y) - g(\infty)| < \varepsilon$ , ( $y \geq A$ ), 于是

$$|xf(x) - g(\infty)| \leq x \int_0^{\infty} e^{-xy} |g(y) - g(\infty)| dy + \varepsilon, \\ (x > 0).$$

令  $x \rightarrow 0+$  并注意  $\varepsilon > 0$  之任意性可得:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} xf(x) = g(\infty).$$

仿上,

$$xf(x) - g(0+) = x \int_0^{\infty} e^{-xy} (g(y) - g(0+)) dy,$$

任给  $\varepsilon > 0$ , 取  $\delta > 0$ , 使

$$|g(y) - g(0+)| < \varepsilon, \quad y \in (0, \delta),$$

则

$$|xf(x) - g(0+)| \leq \varepsilon + x \int_{\delta}^{\infty} e^{-xy} |g(y) - g(0+)| dy \\ \leq \varepsilon + xe^{-\frac{1}{2}\delta} \int_{\delta}^{\infty} e^{-\frac{x}{2}y} |g(y) - g(0+)| dy, \quad (x > 0),$$

令  $x \rightarrow \infty$  并注意  $\varepsilon > 0$  之任意性可得:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} xf(x) = g(0+).$$

**定理4.15.** 设  $Q$  是有法的转强阵, 若  $\alpha' \geq 0$ ,  $\alpha' \in (l)$ , 则  $\alpha'Q = 0 \iff \alpha' \bar{\Pi} = \alpha'$ .

**证** 设  $\alpha' \geq 0$ ,  $\alpha' \in (l)$ ,  $\alpha' \bar{\Pi} = \alpha'$ . 则由本节前部所述的准转阵性质(II)有

$$\alpha' = \alpha' \bar{\Pi} = \alpha' \bar{\Pi} \bar{P}(t) = \alpha' \bar{P}(t), \quad (t \geq 0).$$

取拉氏变换得

$$\alpha' = \lambda \alpha' \bar{R}(\lambda), \quad (\lambda > 0). \quad (4.71)$$

由  $\bar{R}(\lambda)$  满足  $(F_1)$  得

$$\bar{R}(\lambda)(\lambda I + D_q) = \bar{R}(\lambda)S + I, \quad (\lambda > 0). \quad (4.72)$$

把(4.72)两边左乘以  $\alpha'$  并注意(4.71)得

$$\frac{1}{\lambda} \alpha' D_q = \frac{1}{\lambda} \alpha' S, \quad (\lambda > 0).$$

此即  $\alpha'Q = 0$ .

再设  $\alpha' \geq 0$ ,  $\alpha' \in (I)$ ,  $\alpha' Q = 0$ . 则

$$\alpha'(\lambda I - Q) = \lambda \alpha' \geq 0,$$

由命题4.2得

$$\alpha' \geq \lambda \alpha' \bar{R}(\lambda). \quad (4.73)$$

由Q有法知  $1 - \lambda \bar{R}(\lambda) 1 = 0$ , 故

$$\alpha' 1 = (\lambda \alpha' \bar{R}(\lambda)) 1. \quad (4.74)$$

由(4.73)、(4.74)得

$$\alpha' = \lambda \alpha' \bar{R}(\lambda), \quad (\lambda > 0). \quad (4.75)$$

但是, 由引理4.1有

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0+} \lambda \bar{R}(\lambda) = \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{P}(t) = \bar{\Pi}, \quad (4.76)$$

又因为

$$\lambda \bar{R}(\lambda) \geq 0, \quad \lambda \bar{R}(\lambda) 1 = 1, \quad \alpha' \in (I),$$

所以在(4.75)中令  $\lambda \rightarrow 0+$ , 并注意(4.76)再用控制收敛定理即可得  $\alpha' = \alpha' \bar{\Pi}$ .

**定理4.16.** 设Q是任一转强阵, 则  $\bar{\Pi}Q = Q\bar{\Pi} = 0$ .

**证** 因为  $\bar{P}'(t) = Q\bar{P}(t)$ , ( $t \geq 0$ ) (此处  $\bar{P}'(t)$  表  $\bar{P}(t)$  对  $t$  的微商), 所以在上式中令  $t \rightarrow \infty$  并利用本节前部所述的准转概率性质(VI)及控制收敛定理可得:

$$0 = Q\bar{\Pi}.$$

又因为  $\bar{\Pi}^2 = \bar{\Pi}$ , 所以用定理4.15 (注意: 定理4.15的充分性部份并不要求Q是有法的)得

$$\bar{\Pi}Q = 0.$$

**定理4.17.** 任给转强阵 Q, 设  $P(t)$  是任一 Q—过程,  $\Pi = \lim_{t \rightarrow \infty} P(t)$ , 则  $\Pi$  具有下述结构:

$$\Pi = \begin{matrix} & \begin{matrix} N & R_1 & R_2 & \dots \end{matrix} \\ \begin{matrix} N \\ R_1 \\ R_2 \\ \vdots \end{matrix} & \left( \begin{array}{cccc} 0 & \alpha(1)\pi'(1) & \alpha(2)\pi'(2) & \dots \\ 0 & 1\pi'(1) & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1\pi'(2) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \right) \end{matrix},$$

$E = N \cup R = N \cup (UR_m)$ ,  $N \cap R = \emptyset$ ,  $N$  和  $R$  可以是空集,  $R_k \cap R_m = \emptyset (k \neq m)$ ,  $a(i) \geq 0$  是列向量, 其维数与  $N$  中元素的个数同,  $\pi'(i)$  是行向量, 其维数与  $R_i$  中元素的个数同, 且  $\pi'(i) \geq 0$ ,  $\pi'(i)1 = 1$ ,  $\Pi 1 \leq 1$ .

证 仿第一篇命题 4.3

设  $Q$  是有法的转强阵. 由定理 4.15 有: 当  $a' \geq 0$ ,  $a' \in (I)$  时,

$$a'Q = 0 \iff a'\bar{\Pi} = a'.$$

若再注意  $\bar{\Pi}$  有定理 4.17 中的结构, 就可看出:

$$\langle\langle a'Q = 0, a' \geq 0, a' \in (I) \rangle\rangle$$

的通解必具有下述形式:

$$a' = \begin{pmatrix} N & R_1 & R_2 & \dots \\ 0, & C_1\pi'(1) & C_2\pi'(2), & \dots \end{pmatrix},$$

其中  $C_i$  是非负实数.  $\sum_i C_i < \infty$ , 所以, 解方程式

$$\langle\langle a'Q = 0, a' \geq 0, a' \in (I) \rangle\rangle$$

可以看出: 其通解中那些必为 0 的分量所处的位置就是  $N$ , 也可看出  $R_i$  及对应的  $\pi'(i)$ . 所以, 只须定出  $a(i)$ ,  $\bar{\Pi}$  就完全求出来了.

定理 4.18. 设  $Q$  是任一转强阵, 则

$$(i) \quad y \geq 0, y \in (m), Qy = 0 \implies y \geq \bar{\Pi}y;$$

(ii)  $a(1)$  是

$$(Z), \quad \langle\langle 0 = Q \begin{pmatrix} z \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{matrix} N \\ R_1 \\ R_2 \\ \vdots \end{matrix}, z \geq 0, z \in (m) \rangle\rangle$$

的最小解  $y_{\min}$  中所对应的  $z$ , 即  $a(1) = y_{\min}$  on  $N$ . (其它  $a(i)$  求法类似).

证 (i) 因为  $Qy = 0$ ,  $0 \leq y \in (m)$ , 所以

$$(\lambda I - Q)y = \lambda y, (\lambda > 0),$$

因此由命题 4.2 得

$$y \geq \lambda \bar{R}(\lambda)y, (\lambda > 0). \quad (4.77)$$

在(4.77)中令 $\lambda \rightarrow \infty$ 并注意(4.76)及 $0 \leq y \in (m)$ 再用法都引理可得

$$y \geq \liminf_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \bar{R}(\lambda)y \geq (\liminf_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \bar{R}(\lambda))y = \bar{\Pi}y.$$

(11) 由定理4.16有 $Q\bar{\Pi} = 0$ . 更有 $Q\bar{\Pi}e_i = 0 (i \in R_1)$ , 此即

$$Q \begin{pmatrix} a(1) \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = 0,$$

显然 $0 \leq a(1) \in (m)$ , 所以

$$y = \begin{matrix} N \\ R_1 \\ R_2 \\ \vdots \end{matrix} \begin{pmatrix} a(1) \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

是方程(Z)之解. 再设

$$\begin{pmatrix} z \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

也是方程(Z)之解, 则

$$\begin{pmatrix} z \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \geq \bar{\Pi} \begin{pmatrix} z \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \geq \bar{\Pi} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(1) \\ 1 \\ 0 \\ \dots \end{pmatrix},$$

定理证毕.

下面我们讨论对一类特殊的有法的转强阵 $Q$ 来说, 其对应的 $\bar{\Pi}$ 如何求.

我们称 $Q = (q_{i,j}, i, j \in E)$ 是可约的, 如果存在 $E$ 的一个真子

集 $F$ ,  $F \subset E$ ,  $F \neq E$ , 使 $q_{i,j} = 0 (i \in F, j \in \bar{F})$ . 否则称 $Q$ 是不可约的.

**定理4.19.** 若 $Q$ 是不可约的转强阵, 则有: 或者 $E = N$  (这时 $\bar{\Pi} = 0$ ) 或者 $E = R_1$  (这时 $\bar{\Pi} = 1\pi'(1)$ ).

**证** 谬设 $E = N \cup (\bigcup_{m=1}^{\infty} R_m)$  中 $R_1 \neq \emptyset, N \cup (\bigcup_{m=1}^{\infty} R_m) \neq \emptyset$ , 则 $\bar{\Pi}$ 中必有一行 $e'_i \bar{\Pi}$ 是如下形状:

$$\begin{pmatrix} R_1 & N \cup (\bigcup_{m=1}^{\infty} R_m) \\ (\pi'(1) & 0) \end{pmatrix}.$$

记

$$\bar{P}(t) = \begin{pmatrix} R_1 & N \cup (\bigcup_{m=1}^{\infty} R_m) \\ N \cup (\bigcup_{m=1}^{\infty} R_m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A(t) & B(t) \\ C(t) & D(t) \end{pmatrix},$$

在 $\bar{\Pi} \bar{P}(t) = \bar{\Pi}$ 中取前面指出的那一行得  
 $e'_i \bar{\Pi} \bar{P}(t) = l'_i \bar{\Pi}$ , 此即

$$(\pi'(1), 0) \begin{pmatrix} A(t) & B(t) \\ C(t) & D(t) \end{pmatrix} = (\pi'(1), 0).$$

所以

$$\pi'(1)B(t) = 0.$$

但是 $\pi'(1) > 0$ , 从而 $B(t) = 0$ , 故

$$Q = \begin{pmatrix} A'(0) & 0 \\ C'(0) & D'(0) \end{pmatrix},$$

此即 $Q$ 是可约的. 定理证毕.

**定理4.20.** 设 $Q$ 是有法的不可约转强阵, 则

(i)  $\ll a'Q = 0, a' \geq 0, a' \in (l) \gg$  只有0解  $\implies \bar{\Pi} = 0$ ,

(ii)  $\ll a'Q=0, a'\geq 0, a'\in(I) \gg$  有非0解  $\implies$  其通解必为  $C\pi', \pi'>0, \pi'1=1$ , 这时  $\bar{\Pi}=1\pi'$ .

证 由定理4.17、4.19立得此定理.

## § 5. 生灭过程

在这一节中, 我们将要研究一类在实际问题中较为常见的特殊的马尔可夫过程—生灭过程.

假定有一个固定的服务机构, 来到该机构请求服务的顾客具有下列规律:

(1) 时齐性, 即是对任何  $t>0, a\geq 0$ , 在  $[a, a+t)$  内来到  $k$  个顾客的概率  $v_k(t)$  与  $a$  无关, 而且  $\sum_{k=0}^{\infty} v_k(t) \equiv 1$ ;

(2) 无后效性, 即是在  $[a, a+t)$  内来到  $k$  个顾客的概率与时刻  $a$  以前曾经来到过多少顾客无关;

(3) 普通性, 即是当  $t \rightarrow 0^+$  时,

$$\psi(t) \equiv \sum_{k=2}^{\infty} v_k(t) = o(t).$$

若令  $X_t$  是  $[0, t)$  内来到的顾客的数目, 则容易证明:  $P(X_{s+t}=j|X_s=i) = v_{j-i}(t)$ , (当  $k<0$ , 定义  $v_k(t)=0$ ,  $P(A|M)$  表条件概率) 且下述  $P(t)$  是转概率:

$$P(t) = \begin{pmatrix} v_0(t) & v_1(t) & \cdots \\ 0 & v_0(t) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \end{pmatrix}.$$

下面我们把  $v_k(t)$  算出来. 由时齐性及无后效性得知:

$$v_0(t) = (v_0(1))^t, (t \geq 0).$$

以下假定  $0 < v_0(1) < 1$ , 故  $v_0(t)$  可表为:

$$v_0(t) = e^{-\lambda t}, 0 < \lambda < \infty.$$

对  $k \geq 1$ , 利用时齐性、无后效性、普通性可得:



$$v_k(t+\tau) = v_k(t)v_0(\tau) + v_{k-1}(t)v_1(\tau) + o(\tau),$$

$$(\tau \rightarrow 0^+),$$

但是,

$$v_0(\tau) = e^{-\lambda\tau} = 1 - \lambda\tau + o(\tau), \quad (\tau \rightarrow 0),$$

$$v_1(\tau) = 1 - v_0(\tau) - \psi(\tau) = \lambda\tau + o(\tau), \quad (\tau \rightarrow 0),$$

所以

$$\frac{v_k(t+\tau) - v_k(t)}{\tau} = \lambda(v_{k-1}(t) - v_k(t)) + o(1),$$

$$(\tau \rightarrow 0).$$

因此, 令  $\tau \rightarrow 0$  得: (此处  $v'_k(t)$  表示对  $t$  求微商)

$$v'_k(t) = \lambda(v_{k-1}(t) - v_k(t)), \quad (k=1, 2, \dots).$$

令

$$\Phi(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(t)x^k, \quad (|x| \leq 1)$$

为  $\{v_k(t), k \geq 0\}$  的母函数, 则有

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} v_{k-1}(t)x^k - \lambda \Phi = \lambda(x-1)\Phi.$$

(注意: 由定理3.6知  $\sum_{k=0}^{\infty} |v'_k(t)| \leq 2|v'_0(0)|$ , 故逐项微商是合法的。)

即是

$$\frac{\partial \log \Phi}{\partial t} = \lambda(x-1).$$

故  $\log \Phi(t, x) - \log \Phi(0, x) = \lambda(x-1)t.$

但是  $\Phi(0, x) = v_0(0) = 1, \quad (|x| \leq 1),$

所以

$$\Phi(t, x) = e^{-\lambda(x-1)t} = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} x^k.$$

亦即  $v_k(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, (k \geq 0),$

从而其转强阵为

$$Q = P'(0) = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \end{pmatrix}.$$

如果我们假定每一个顾客的服务时间  $T$  服从负指数分布:

$$P(T < v) = \begin{cases} 0, & v \leq 0, \\ 1 - e^{-\mu v}, & v > 0, \end{cases}$$

则有

$$P(T \geq v + c | T \geq c) = P(T \geq v).$$

上述等式的直观意义是:“剩余的服务时间”仍旧服从  $T$  所服从的负指数分布。

在上述种种假定下, 如果还假设不同的顾客的服务时间是相互独立的, 令  $Y_t$  是时刻  $t$  此服务机构中所有的顾客数目, 则可以证明:  $P(Y_{t+\tau} = j | Y_t = i) = p_{ij}^*(t), (i, j \geq 0),$  且

$$P^*(t) = (p_{ij}^*(t), ij \geq 0)$$

是转概阵,

$$Q^* = P^{*'}(0) = (q_{ij}^*, ij \geq 0)$$

为其转强阵。  $P^*(t)$  不易算出, 而  $Q^*$  到是容易算出。

由于在  $[t, t + \tau)$  内来到  $k$  个顾客的概率  $v_k(t)$  满足下述关系:

$$v_0(\tau) = 1 - \lambda\tau + o(\tau), (\tau \rightarrow 0),$$

$$v_1(\tau) = \lambda\tau + o(\tau), (\tau \rightarrow 0),$$

$$\psi(\tau) = \sum_{k=2}^{\infty} v_k(\tau) = o(\tau), (\tau \rightarrow 0),$$

又由于服务时间服从负指数分布, 所以在时刻  $t$  正在服务的  $k$  个顾客在  $t + \tau$  恰有  $i$  个顾客已经结束了其服务的概率  $u_i(\tau)$  满足下述关系:

$$u_0(\tau) = e^{-k\mu\tau} = 1 - k\mu\tau + o(\tau), (\tau \rightarrow 0),$$

$$u_1(\tau) = k\mu\tau + o(\tau), \quad (\tau \rightarrow 0),$$

$$u_i(\tau) = o(\tau), \quad (i > 1, \tau \rightarrow 0).$$

基于  $v_k(t)$  与  $u_i(\tau)$  满足上述两组关系, 所以

$$p_{0,0}^*(\tau) = 1 - \lambda\tau + o(\tau), \quad (\tau \rightarrow 0),$$

$$p_{k,k}^*(\tau) = 1 - (k\mu + \lambda)\tau + o(\tau), \quad (\tau \rightarrow 0, k \geq 1),$$

$$p_{k,k+1}^*(\tau) = \lambda\tau + o(\tau), \quad (\tau \rightarrow 0, k \geq 0),$$

$$p_{k,k-1}^*(\tau) = k\mu\tau, \quad (\tau \rightarrow 0, k \geq 1),$$

$$p_{i,k}^*(\tau) = o(\tau), \quad (\tau \rightarrow 0, |i - k| > 1).$$

因此

$$Q^* = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & 2\mu & -(\lambda + 2\mu) & \lambda & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

在这一节中, 我们就要研究 § 3 和 § 4 中的一般理论用到这类具体的转强阵  $Q^*$  上去有何更深刻更具体的结果。例如, 我们的  $P^*(t)$  并没求出, 如果能找出  $Q^*$  的有法性的充要条件, 那么, 也就找出了  $P^*(t) = \bar{P}(t)$  ( $\bar{P}(t)$  如定理 4.3 所构造, 只不过把  $Q$  代之以  $Q^*$  而已), 再如, 对于这种类型的转强阵, 其  $l^+ = ?$ ,  $m^+ = ?$ , 其全体  $Q^*$ —过程如何构造…?

下面我们研究的转强阵  $Q$ , 比  $Q^*$  稍为一般一些。

**定义 5.1.** 称具有下述形式的矩阵:

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \lambda_2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots \end{pmatrix},$$

$$\lambda_0 \geq 0,$$

$$\lambda_1, \cdots, \lambda_n, \cdots > 0,$$

$$\mu_1, \cdots, \mu_n, \cdots > 0,$$

(即是  $Q = (q_{i,j}), i, j \geq 0$ ),  $q_{0,0} = -\lambda_0$ ,  $q_{0,1} = \lambda_0$ ,  $q_{0,i} = 0$ , ( $i \geq$

2), 当  $i \geq 1$  时,  $q_{i,i} = -(\lambda_i + \mu_i)$ ,  $q_{i,i+1} = \lambda_i$ ,  $q_{i,i-1} = \mu_i$ ,  $q_{i,j} = 0$ , ( $|j-i| > 1$ ) 为生灭过程转强阵。显然上述  $Q$  是保守的。

以后如不特别声明, 在这一节中所涉及的  $Q$ , 均为生灭过程转强阵。

在这一节中, 我们要把 § 4 中的一般理论用到生灭过程转强阵上来。

**引理 5.1.** 给定实数  $z_1 > z_0 \geq 0$ , 及  $f_n > 0$ ,  $g_n > 0$ , ( $n \geq 1$ ), 用递推公式:

$$z_{n+1} - z_n = f_n z_n + g_n (z_n - z_{n-1}), \quad (n = 1, 2, \dots)$$

来定义  $\{z_n, n \geq 0\}$ 。(显然  $0 \leq z_0 < z_1 < z_2 < \dots$ ) 则  $\sup_{n \geq 0} z_n < \infty$  的充要条件是:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n f_k g_{k+1} \cdots g_n < \infty. \quad (5.1)$$

**证** 令  $u_n = z_{n+1} - z_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  
则  $u_n = f_n z_n + g_n u_{n-1}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ .  
再令

$$v_n = \frac{u_n}{g_1 g_2 \cdots g_n}, \quad (n \geq 1), \quad v_0 = 0,$$

则  $g_1 g_2 \cdots g_n v_n = f_n z_n + g_1 \cdots g_n v_{n-1}$ , ( $n \geq 1$ ),  
即是

$$v_n - v_{n-1} = \frac{f_n z_n}{g_1 \cdots g_n}, \quad (n \geq 1).$$

所以

$$v_n = v_0 + \sum_{k=1}^n (v_k - v_{k-1}) = z_1 - z_0 + \sum_{k=1}^n \frac{f_k z_k}{g_1 \cdots g_k}.$$

因此  $u_n = g_1 \cdots g_n v_n$

$$= g_1 \cdots g_n (z_1 - z_0) + \sum_{k=1}^n f_k g_{k+1} \cdots g_n z_k, \quad (n \geq 1).$$

亦即

$$z_{n+1} - z_n = g_1 \cdots g_n (z_1 - z_0) + \sum_{k=1}^n f_k g_{k+1} \cdots g_n z_k, \quad (n \geq 1).$$

必要性。因为

$$z_{n+1} - z_n \geq z_1 \sum_{k=1}^n f_k g_{k+1} \cdots g_n,$$

.....

$$z_2 - z_1 \geq z_1 f_1 g_2,$$

所以，把上述诸不等式相加即得：

$$z_{n+1} \geq z_1 + z_1 \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^l f_k g_{k+1} \cdots g_l, \quad (n \geq 1),$$

因为  $z_1 > 0$ ,  $\sup_{n \geq 0} z_n < \infty$ , 所以

$$\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^l f_k g_{k+1} \cdots g_l < \infty.$$

充分性。因为

$$\begin{aligned} z_{n+1} - z_n &= g_1 \cdots g_n (z_1 - z_0) + \sum_{k=1}^n f_k g_{k+1} \cdots g_n z_k \\ &\leq \left( g_1 \cdots g_n + \sum_{k=1}^n f_k g_{k+1} \cdots g_n \right) z_n, \quad (n \geq 1), \end{aligned}$$

所以，若记上述不等式右端括号内之数为  $F_n$ ，则有

$$z_{n+1} \leq (F_n + 1) z_n, \quad (n \geq 1).$$

逐次递推得：

$$\begin{aligned} z_{n+1} &\leq (1 + F_n)(1 + F_{n-1}) \cdots (1 + F_1) z_1 \\ &\leq z_1 e^{\sum_{k=1}^n F_k}, \quad (n \geq 1). \end{aligned}$$

$$\text{若} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n f_k g_{k+1} \cdots g_n < \infty, \quad (5.1)$$

$$\text{更有} \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_1 g_2 \cdots g_n < \infty,$$

则 
$$\sum_{n=1}^{\infty} g_1 \cdots g_n < \infty. \quad (5.2)$$

由(5.1)及(5.2)得知:

$$\sum_{k=1}^{\infty} F_k < \infty.$$

但是  
所以

$$z_{n+1} \leq z_1 e^{\sum_{k=1}^n F_k}, \quad (n \geq 1),$$

$$\sup_{n \geq 0} z_n < \infty.$$

下面我们对生灭过程转强阵 $Q$ 来研究空间 $\mathcal{M}_1$ 和 $\mathcal{L}_1$ .

**定理5.1.** 对生灭过程转强阵 $Q$ 来说,  $m^+$ 或则为0,或则为1.  
而且下列三命题等价:

- (1)  $Q$ 是有法的;
- (2)  $m^+ = 0$ ;

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \frac{\mu_{k+1} \cdots \mu_n}{\lambda_n \lambda_{k+1} \cdots \lambda_n} = \infty.$$

**证** 解方程式:

$$\ll (\lambda I - Q)z = 0, \quad z \geq 0, \quad z \neq 0 \gg, \quad (\lambda > 0),$$

即是解

$$\begin{aligned} (\lambda + \lambda_0)z_0 &= \lambda_0 z_1, \\ (\lambda + \lambda_1 + \mu_1)z_1 &= \mu_1 z_0 + \lambda_1 z_2, \\ &\dots\dots\dots (\lambda > 0), \quad z = \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_n \\ \vdots \end{pmatrix}, \\ (\lambda + \lambda_n + \mu_n)z_n &= \mu_n z_{n-1} + \lambda_n z_{n+1}, \\ &\dots\dots\dots, \end{aligned}$$

$$z \geq 0, \quad z \neq 0.$$

当 $\lambda_0 = 0$ 时: 上述方程组中 $z_0$ 必为0,  $z_1$ 可为 $>0$ 的任一数(若 $z_1 = 0$ , 必有 $z_n = 0, n \geq 0$ ), 而诸 $z_n$ 满足:

$$\lambda_n(z_{n+1} - z_n) = \lambda z_n + \mu_n(z_n - z_{n-1}), \quad (n \geq 1).$$

当  $\lambda_0 > 0$  时:  $z_0$  可为  $> 0$  的任一数 (否则一切  $z_n = 0$ ), 诸  $z_n$  满足:

$$z_1 = z_0 + \frac{\lambda}{\lambda_0} z_0 > z_0,$$

$$\lambda_n(z_{n+1} - z_n) = \lambda z_n + \mu_n(z_n - z_{n-1}), \quad (n \geq 1).$$

所以, 无论  $\lambda_0 = 0$  或者  $\lambda_0 > 0$ , 都有: 上述方程组之通解为:

$$\begin{cases} z_1 > z_0 \geq 0, \\ z_{n+1} - z_n = \frac{\lambda}{\lambda_n} z_n + \frac{\mu_n}{\lambda_n} (z_n - z_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (5.3)$$

由此看出:  $m^+ = 0$  或者 1, 而且  $m^+ = 0$  即

$$\langle\langle (\lambda I - Q)y = 0, \quad y \geq 0, \quad y \in (m) \rangle\rangle$$

只有 0 解的充要条件是 (5.3) 中确定的  $\{z_n, n \geq 0\}$  是无界序列 (即  $z \notin (m)$ ). 但是, 由引理 5.1 得知: (5.3) 中所确定的  $\{z_n, n \geq 0\}$  是无界序列的充要条件是:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \frac{\lambda}{\lambda_k} \frac{\mu_{k+1}}{\lambda_{k+1}} \dots \frac{\mu_n}{\lambda_n} = \infty, \quad (\lambda > 0).$$

又因为  $Q$  是保守的, 所以, 由定理 4.4 (iii) 及定理 4.6 (ii) 得知:

$$Q \text{ 是有法的} \iff m^+ = 0.$$

至此, 定理 5.1 证毕。

**定理 5.2.** 对生灭过程转强阵  $Q$  来说,  $l^+$  或则为 0, 或则为 1. 而且  $l^+ = 0$  的充要条件是:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\mu_{k+1}} \frac{\lambda_{k+1}}{\mu_{k+2}} \dots \frac{\lambda_n}{\mu_{n+1}} = \infty.$$

**证** 解方程式

$$\langle\langle a'(\lambda I - Q) = 0, \quad a' \geq 0, \quad a' \neq 0 \rangle\rangle, \quad (\lambda > 0),$$

即是解

$$(\lambda + \lambda_0)a_0 = \mu_1 a_1, \quad (\lambda > 0),$$

$$(\lambda + \lambda_n + \mu_n) \alpha_n = \lambda_{n-1} \alpha_{n-1} + \mu_{n+1} \alpha_{n+1}, \quad (n \geq 1), \quad (\lambda > 0),$$

(5.4)

其中

$$\alpha' = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots).$$

把(5.4)中诸式对  $n = 0, 1, \dots, m$  加起来得:

$$\begin{aligned} & (\lambda(\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_m) + (\lambda_0 \alpha_0 + \dots + \lambda_m \alpha_m) \\ & + (\mu_1 \alpha_1 + \dots + \mu_m \alpha_m) \\ & - (\lambda_0 \alpha_0 + \dots + \lambda_{m-1} \alpha_{m-1}) + (\mu_1 \alpha_1 + \dots + \mu_{m+1} \alpha_{m+1})). \end{aligned}$$

令  $z_m = (\alpha_0 + \dots + \alpha_m)$ , 代入上式即得:

$$z_{m+1} - z_m = \frac{\lambda}{\mu_{m+1}} z_m + \frac{\lambda_m}{\mu_{m+1}} (z_m - z_{m-1}), \quad (m \geq 1).$$

由此看出:  $l^+ = 0$  或者 1, 而且  $l^+ = 0$ , 即是

$$\langle\langle \alpha'(\lambda I - Q) = 0, \alpha' \geq 0, \alpha' \in (l) \rangle\rangle$$

只有零解的充要条件是:  $\{z_n, n \geq 0\}$  是无界序列, 再利用引理 5.1 得知:  $\{z_n, n \geq 0\}$  是无界序列的充要条件是:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \frac{\lambda}{\mu_{k+1}} \frac{\lambda_{k+1}}{\mu_{k+2}} \dots \frac{\lambda_n}{\mu_{n+1}} = \infty.$$

至此, 定理 5.2 证毕。

当  $\lambda_0 > 0$  时, 显然有

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \frac{\mu_{k+1} \dots \mu_n}{\lambda_k \lambda_{k+1} \dots \lambda_n} = \infty \\ \Leftrightarrow & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{\mu_{k+1} \dots \mu_n}{\lambda_0 \lambda_{k+1} \dots \lambda_n} = \infty \\ \Leftrightarrow & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{\mu_{k+1} \dots \mu_n}{\lambda_0 \lambda_{k+1} \dots \lambda_n} = \infty, \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\mu_{k+1}} \frac{\lambda_{k+1}}{\mu_{k+2}} \dots \frac{\lambda_n}{\mu_{n+1}} = \infty \end{aligned}$$



$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{\mu_{k+1}} \frac{\lambda_{k+1}}{\mu_{k+2}} \dots \frac{\lambda_n}{\mu_{n+1}} = \infty$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{\mu_{k+1}} \frac{\lambda_{k+1}}{\mu_{k+2}} \dots \frac{\lambda_n}{\mu_{n+1}} = \infty.$$

所以，若令

$$\rho_n = \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdots \mu_n}, \quad (n \geq 1), \quad \rho_0 = 1,$$

$$R = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{\mu_{k+1} \cdots \mu_n}{\lambda_k \lambda_{k+1} \cdots \lambda_n},$$

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{\lambda_{k+1} \cdots \lambda_n}{\mu_{k+1} \cdots \mu_n},$$

则有

$$R = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{\mu_1 \cdots \mu_n}{\mu_1 \cdots \mu_k} \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{k-1}}{\lambda_0 \cdots \lambda_n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n \rho_n} \sum_{k=0}^n \rho_k,$$

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \rho_{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{\lambda_k \rho_k}.$$

由定理4.12看出：对一个保守的转强阵 $Q$ 来说，若 $m^+ = 1$ ，则只要找出 $\vartheta(\lambda)$ 来，其全部 $Q$ -过程就知道了。而今生灭过程的转强阵 $Q$ 是保守的，所以，求全体 $Q$ -过程的问题就化为求 $\vartheta(\lambda)$ 了。

下面我们首先求：（在 $\lambda_0 > 0$ 下）

$$\ll (I - Q)y = 0, \quad y \geq 0, \quad y \in (m) \gg$$

的通解。

若注意

$$\ll (I - Q)y = 0, \quad y \geq 0 \gg$$

等价于

$$y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \end{pmatrix} \geq 0,$$

$$\ll (\lambda I - Q)u = 0, \quad u \geq 0 \gg$$
$$y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad y_n = \frac{A_n(\lambda)y_0}{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}, \quad (n \geq 1), \quad y_0 \geq 0,$$

又因为  $\ll (\lambda I - Q)y = 0, y \geq 0, y \neq 0 \gg$  的解

$$y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\frac{A_n(\lambda)}{\lambda_0 \dots \lambda_{n-1}} \geq \frac{A_{n-1}(\lambda)}{\lambda_0 \dots \lambda_{n-2}}, \quad (n \geq 2),$$

• 185 •

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n(\lambda)}{\lambda_0 \cdots \lambda_{n-1}}$$

存在, 记此极限为  $\bar{A}(\lambda)$ 。因此  $\bar{A}(\lambda) < \infty \iff m^+ = 1$ 。故  $m^+ = 1$  时, 有:

$$\langle (\lambda I - Q)y = 0, y \geq 0, y \in (m) \rangle$$

的通解为

$$y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad y_n = \frac{A_n(\lambda)y_0}{\lambda_0 \cdots \lambda_{n-1}}, \quad (n \geq 1), \quad y_0 \geq 0.$$

故有下述

**定理 5.3.** 设  $Q$  是生灭过程转强阵,  $\lambda_0 > 0$ 。若  $R < \infty$ , (即是  $m^+ = 1$ , 亦即  $Q$  是无法的,) 则

$$\langle (\lambda I - Q)y = 0, y \geq 0, y \in (m) \rangle$$

的通解为

$$y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad y_n = \frac{A_n(\lambda)y_0}{\lambda_0 \cdots \lambda_{n-1}}, \quad (n \geq 1), \quad y_0 \geq 0.$$

仿之, 有

**定理 5.4.** 设  $Q$  是生灭过程转强阵,  $\lambda_0 > 0$ 。若  $W < \infty$ , (即是  $l^+ = 1$ , ) 则

$$\langle a'(\lambda I - Q) = 0, a' \geq 0, a' \in (l) \rangle$$

的通解为

$$a' = (a_0, a_1, \cdots),$$

$$a_n = \frac{A_n(\lambda)a_0}{\mu_1 \cdots \mu_n}, \quad (n \geq 1), \quad a_0 \geq 0.$$

**系 1.**  $Qy = 0$  的通解为

$$y = y_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

$a'Q = 0$  的通解为

$$a' = a_0(1, \rho_1, \rho_2, \dots).$$

证  $Qy = 0$  的通解为

$$y = y_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

乃是显然的。又因为

$$(\lambda I - Q)y = 0$$

的通解为

$$y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad y_n = \frac{A_n(\lambda)y_0}{\lambda_0 \cdots \lambda_n}, \quad (n \geq 1).$$

故  $A_n(0) = \lambda_0 \cdots \lambda_{n-1}$ 。于是，由定理5.4得知

$$a'Q = 0$$

的通解

$$a' = a_0(1, \rho_1, \rho_2, \dots).$$

**定理5.5.** 设 $Q$ 是生灭过程转强阵， $\lambda_0 > 0$ 。若 $m^+ = 1$ ，（即是 $R < \infty$ ，亦即 $Q$ 是无法的，亦即 $\bar{A}(\lambda) < \infty$ ，）则

$$\bar{y}(\lambda) = \begin{pmatrix} y_0(\lambda) \\ y_1(\lambda) \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad y_0(\lambda) = \frac{1}{\bar{A}(\lambda)},$$

$$y_n(\lambda) = \frac{A_n(\lambda)}{\lambda_0 \cdots \lambda_{n-1} \bar{A}(\lambda)}, \quad (n \geq 1).$$

证 由定理5.3得知

$$\ll (\lambda I - Q)y = 0, \quad 0 \leq y \leq 1 \gg$$

的通解为

$$y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad y_n = \frac{A_n(\lambda)y_0}{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}, \quad (n \geq 1), \quad 0 \leq y \leq 1.$$

又因为  $n \rightarrow \infty$  时,

$$\frac{A_n(\lambda)}{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}$$

单调上升到  $\bar{A}(\lambda)$ , 所以,

$$\ll (\lambda I - Q)y = 0, \quad 0 \leq y \leq 1 \gg$$

的通解为

$$y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad y_n = \frac{A_n(\lambda)y_0}{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}, \quad (n \geq 1), \quad 0 \leq y_0 \leq \frac{1}{\bar{A}(\lambda)}.$$

因此,

$$\ll (\lambda I - Q)y = 0, \quad 0 \leq y \leq 1 \gg$$

的最大解为

$$y_{\max} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad y_n = \frac{A_n(\lambda)}{\lambda_0 \cdots \lambda_{n-1} \bar{A}(\lambda)}, \quad (n \geq 1),$$

$$y_0 = \frac{1}{\bar{A}(\lambda)}.$$

但是,

$$\ll \Pi(\lambda)y = y, \quad 0 \leq y \leq 1 \gg$$

与

$$\ll (\lambda I - Q)y = 0, \quad 0 \leq y \leq 1 \gg$$

的解相同, (其中  $\Pi(\lambda) = (\lambda I + D_0)^{-1}S$  如定理4.4中所定义,) 而定理4.4指出  $\bar{y}(\lambda)$  是

$$\ll \Pi(\lambda)y = y, \quad 0 \leq y \leq 1 \gg$$

的最大解, 所以

$$\bar{y}(\lambda) = y_{\max} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad y_n = \frac{A_n(\lambda)}{\lambda_0 \cdots \lambda_{n-1} \bar{A}(\lambda)}, \quad (n \geq 1),$$

$$y_0 = \frac{1}{\bar{A}(\lambda)}.$$

**定理5.6.** 设 $Q$ 是一个生灭过程转强阵,  $\lambda_0 > 0$ .

(1) 若 $R = \infty$  (即是说 $m^+ = 0$ , 亦即 $Q$ 是有法的), 则恰有唯一一个 $Q$ -过程, 它就是定理4.3中所构造出来的 $\bar{P}(t)$ ,  $\bar{P}(t)$ 满足(B)和(F);

(2) 若 $R < \infty$  (即是说 $m^+ = 1$ , 亦即 $Q$ 是无法的), 则全体 $Q$ -过程为定理4.12中所确定的 $\mathscr{D}_1$  (注意: 这时 $\mathscr{D}_1$ 中出现的 $\bar{y}(\lambda)$ 已经在定理5.5中算出来了). 此外,  $\mathscr{D}_1$ 中的 $Q$ -过程按它是否具有 $(B_1)$ ,  $(F_1)$ 和不间断性来分类的话, 还有下面的表:

	$R < \infty$ $W = \infty$	$R < \infty$ $W < \infty$
不间断、 $(B_1)$ 、 $(F_1)$ 的个数	0	1
间断、 $(B_1)$ 、 $(F_1)$ 的个数	1	$\infty$
不间断、 $(B_1)$ 、 $(\bar{F}_1)$ 的个数	$\infty$	$\infty$
间断、 $(B_1)$ 、 $(\bar{F}_1)$ 的个数	$\infty$	$\infty$
其它类型的个数	0	0

**附注:**  $(\bar{F}_1)$  代表不满足 $(F_1)$ . 例如: “间断、 $(B_1)$ 、 $(\bar{F}_1)$ ”代表间断的满足 $(B_1)$ 和不满足 $(F_1)$ 的 $Q$ -过程.

**证** 为证此定理, 只须注意下列几点:

(1) 由命题4.7, 此时任一 $Q$ -过程都满足 $(B_1)$ .

(2) 当 $R < \infty$  (即 $m^+ = 1$ ) 时, 由命题4.12知, 满足 $(B_1)$ 的不间断的 $Q$ -过程有无穷多个, 满足 $(B_1)$ 的间断的 $Q$ -过程也有无穷多个.

(3) 当 $R < \infty$ ,  $W = \infty$  (即 $m^+ = 1$ ,  $l^+ = 0$ , 亦即 $Q$ 无法且 $l^+ = 0$ ) 时, 由定理4.11, 满足 $(F_1)$ 的 $Q$ -过程唯一, 而且它是间断的.

(4) 当 $R < \infty$ ,  $W < \infty$  (即 $m^+ = 1$ ,  $l^+ = 1$ ) 时, 由定理4.11,

满足(F<sub>1</sub>)的Q—过程有无穷多个, 恰有一个是不间断的.

下面我们来计算生灭过程转强阵Q所对应的

$$\bar{P} = \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{P}(t).$$

首先我们证明一个引理.

**引理5.2.** 设Q是任意一个无法的转强阵,(不一定要要求Q是生灭过程转强阵,)则

$$\bar{P} \mathbf{1} \neq \mathbf{1}.$$

**证** 如命题4.1, 造转概阵

$$\tilde{P}(t) = \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ E & \bar{P}(t) \end{pmatrix}, d(t) = \mathbf{1} - \bar{P}(t)\mathbf{1},$$

则有

$$\tilde{P} = \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{P}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d(\infty) & \bar{P} \end{pmatrix},$$

其中  $d(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} d(t)$ . 由命题4.1的附注得知 $d(t)$ 对 $t$ 来说单调非降, 又因为Q是无法的, 所以 $\bar{P}(t)\mathbf{1} \neq \mathbf{1}$ , 亦即 $d(t) \neq 0$ , 更有 $d(\infty) \neq 0$ . 但是 $\tilde{P} \mathbf{1} \leq \mathbf{1}$ ,  $\bar{P} \mathbf{1} \leq \mathbf{1}$ , 所以 $\bar{P} \mathbf{1} \neq \mathbf{1}$ .

**定理5.7.** 设Q是一个生灭过程转强阵,  $\lambda_0 > 0$ .

(1) 若  $\sum_{n=0}^{\infty} \rho_n = \infty$ , 则  $\bar{P} = 0$ ;

(2) 若  $\sum_{n=0}^{\infty} \rho_n < \infty$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n \rho_n} = \infty$ , 则

$$\bar{P} = \mathbf{1}\pi', \quad \pi' = \left( \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n \right)^{-1} (\rho_0, \rho_1, \rho_2, \dots);$$

(3) 若  $\sum_{n=0}^{\infty} \rho_n < \infty$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n \rho_n} < \infty$ , 则  $\bar{P} = 0$ .

证 (1) 因为  $\overline{\Pi}Q = 0$ , 而由定理5.4系1得知  $\alpha'Q = 0$  的通解为

$$\alpha' = \alpha_0(1, \rho_1, \rho_2, \dots), \text{ (注意 } \rho_0 = 1\text{), 但是, 而今}$$

$$\overline{\Pi}1 \leq 1, \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n = \infty, \text{ 所以 } \overline{\Pi} = 0.$$

$$(2) \text{ 由于 } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n \rho_n} = \infty,$$

所以

$$R = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n \rho_n} \sum_{k=0}^n \rho_k = \infty,$$

亦即  $Q$  是有法的。又因为

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho_n < \infty,$$

所以, 由定理5.4的系1得知

$$\ll \alpha'Q = 0, \alpha' \geq 0, \alpha' \in (1) \gg$$

有非零解。而今  $Q$  又是不可约的, 所以, 由定理4.20得知, 必有

$$\overline{\Pi} = 1\pi', \pi' = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \rho_n} (\rho_0, \rho_1, \dots).$$

(3) 若

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n \rho_n} < \infty, \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n < \infty,$$

则

$$R \leq \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n \rho_n} \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n \right) < \infty,$$

因此  $Q$  是无法的。所以由引理5.2得知

$$\overline{\Pi}1 \neq 1.$$



但是, 而今  $Q$  是不可约的, 所以由定理 4.19 得知:  $\bar{\Pi}$  只有两种可能, 或则  $\bar{\Pi} = 0$ , 或则  $\bar{\Pi} = 1\pi'$ ,  $\pi'1 = 1$ . 可是, 我们已经证明  $\bar{\Pi}1 \neq 1$ , 所以  $\bar{\Pi} = 0$ .

**定理 5.8.** 设  $Q$  是一个生灭过程转强阵, 而且  $\lambda_0 = 0$ . 令

$$\gamma = 1 + \frac{\mu_1}{\lambda_1} + \frac{\mu_1\mu_2}{\lambda_1\lambda_2} + \dots,$$

$$y_n^0 = \frac{1}{\gamma} \left( \frac{\mu_1 \cdots \mu_n}{\lambda_1 \cdots \lambda_n} + \frac{\mu_1 \cdots \mu_{n+1}}{\lambda_1 \cdots \lambda_{n+1}} + \dots \right), \quad (n \geq 0).$$

(1) 若  $\gamma = \infty$ , 则

$$\bar{\Pi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{pmatrix};$$

(2) 若  $\gamma < \infty$ , 则

$$\bar{\Pi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ y_1^0 & 0 & 0 & \cdots \\ y_2^0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{pmatrix}.$$

**证** 令

$$\bar{\Pi} = (\bar{\pi}_{ij}, \quad i, j \geq 0),$$

则由

$$\bar{\Pi}Q = 0$$

得

$$\bar{\pi}_{i,1}\mu_1 = 0, \quad (i \geq 0),$$

$$- \bar{\pi}_{i,1}(\lambda_1 + \mu_1) + \bar{\pi}_{i,2}\mu_2 = 0, \quad (i \geq 0),$$

$$\bar{\pi}_{i,n-1}\lambda_{n-1} - \bar{\pi}_{i,n}(\lambda_n + \mu_n) + \bar{\pi}_{i,n+1}\mu_{n+1} = 0, \quad (n \geq 2), \quad (i \geq 0),$$

.....

由  $\lambda_i > 0, \mu_i > 0, (i \geq 1)$  得知

$$\bar{\pi}_{i,j} = 0, \quad (i \geq 0, j \geq 1).$$

又因为  $q_{0,0} = -\lambda_0 = 0$ , 所以, 由 § 4 准转阵性质(III) 得知, 对

任何 $Q$ -过程 $P(t) = (p_{i,j}(t), i, j \geq 0)$ 来说, 恒有

$$p_{0,0}(t) \equiv 1.$$

更有  $\bar{\pi}_{0,0} = 1$ .

综上所述, 我们得知 $\bar{\Pi}$ 必为下述形状:

$$\bar{\Pi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_2 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{pmatrix}.$$

下面我们就来算 $a_n, (n \geq 1)$ .

由定理4.18得知

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \text{ 是 } \ll Q \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix} = 0, 0 \leq y \leq 1 \gg$$

的最小解所对应的 $y$ . 上述方程式即:

$$\mu_1 - (\lambda_1 + \mu_1)y_1 + \lambda_1 y_2 = 0,$$

$$\mu_n y_{n-1} - (\lambda_n + \mu_n)y_n + \lambda_n y_{n+1} = 0, (n \geq 2),$$

$$0 \leq y_n \leq 1, (n \geq 1).$$

解上述方程组得:

$$\begin{aligned} y_{n+1} = & - \left( \frac{\mu_1}{\lambda_1} + \frac{\mu_1 \mu_2}{\lambda_1 \lambda_2} + \cdots + \frac{\mu_1 \cdots \mu_n}{\lambda_1 \cdots \lambda_n} \right) + \\ & + \left( \frac{\mu_1}{\lambda_1} + \frac{\mu_1 \mu_2}{\lambda_1 \lambda_2} + \cdots + \frac{\mu_1 \cdots \mu_n}{\lambda_1 \cdots \lambda_n} + 1 \right) y_1, (n \geq 1). \end{aligned}$$

欲 $0 \leq y_n \leq 1, (n \geq 1)$ , 必须而且只须:

$$\frac{\gamma_n - 1}{\gamma_n} \leq y_1 \leq 1, (n \geq 1),$$

其中

$$\gamma_n = \left( 1 + \frac{\mu_1}{\lambda_1} + \cdots + \frac{\mu_1 \cdots \mu_n}{\lambda_1 \cdots \lambda_n} \right).$$

所以

(1) 当  $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = \infty$  时,

$$\langle\langle Q \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix} = 0, \quad 0 \leq y \leq 1 \rangle\rangle$$

的最小解为1, 故  $\alpha = 1$ .

(2) 当  $\gamma < \infty$  时,

$$\langle\langle Q \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix} = 0, \quad 0 \leq y \leq 1 \rangle\rangle$$

的最小解为:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ y_1^0 \\ y_2^0 \\ \vdots \end{pmatrix},$$

其中

$$y_n^0 = \frac{1}{\gamma} \left( \frac{\mu_1 \cdots \mu_n}{\lambda_1 \cdots \lambda_n} + \frac{\mu_1 \cdots \mu_{n+1}}{\lambda_1 \cdots \lambda_{n+1}} + \cdots \right), \quad (n \geq 1).$$

故

$$\alpha = \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

下面我们要研究生过程转强阵。

**定义5.2.** 称下述形状的矩阵:

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -\lambda_1 & \lambda_1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (\lambda_i > 0, \quad i \geq 0)$$

为生过程转强阵。

**定理5.9.** 对生过程转强阵  $Q$  来说,  $m^+ = 1$  或者  $m^+ = 0$ , 而且  $m^+ = 0$  即是  $Q$  是有法的充要条件是:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} = \infty$$

证 解  $\langle (\lambda I - Q)y = 0, 0 \leq y \leq 1 \rangle$ . 因为

$$(\lambda I - Q)y = 0$$

即是

$$(\lambda + \lambda_n)y_n - \lambda_n y_{n+1} = 0, \quad (n \geq 0).$$

所以

$$y_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{\lambda_n}\right)y_n = \cdots = \left(\prod_{i=0}^n \left(1 + \frac{1}{\lambda_i}\right)\right)y_0, \quad (n \geq 0).$$

因此,  $\langle (\lambda I - Q)y = 0, 0 \leq y \leq 1 \rangle$  仅有零解的充要条件是:

$$\prod_{i=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{\lambda_i}\right)$$

发散, 或等价地说  $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i}$  发散. 又因为  $Q$  是保守的, 所以, 由定理 4.6 及 4.4 得知,  $Q$  是有法的充要条件是  $\langle (\lambda I - Q)y = 0, 0 \leq y \leq 1 \rangle$  仅有零解. 而且从上面我们还看出  $m^+$  只能为 1 或者 0. 至此, 定理 5.9 得证.

**定理 5.10.** 对生过程转强阵  $Q$  来说,  $l^+$  恒等于 0.

证 因为

$$a'(\lambda I - Q) = 0$$

即是

$$\begin{aligned} a_0(\lambda + \lambda_0) &= 0, \\ -a_0\lambda_0 + a_1(\lambda + \lambda_1) &= 0, \\ &\dots\dots \\ -a_n\lambda_n + a_{n+1}(\lambda + \lambda_{n+1}) &= 0 \\ &\dots\dots \end{aligned}$$

所以  $a' = (0, 0, \dots)$ . 更有:

$$\langle a'(\lambda I - Q) = 0, a' \geq 0, a' \in (1) \rangle$$

只有零解，亦即  $l^+ = 0$ 。

**定理5.11.** 若  $Q$  是无法的生过程转强阵，则  $\bar{y}(\lambda)$  可算出如下：

$$\bar{y}(\lambda) = \begin{pmatrix} y_0(\lambda) \\ y_1(\lambda) \\ \vdots \end{pmatrix},$$

$$y_h(\lambda) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda + \lambda_{n+h}} \prod_{i=h}^{n+h-1} \frac{\lambda_i}{\lambda + \lambda_i}.$$

**证** 如定理4.3,  $\bar{y}(\lambda) = 1 - \lambda \bar{R}(\lambda)1$ ,

$$\bar{R}(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(\lambda),$$

$$R_n(\lambda) = \Pi^n(\lambda)(\lambda I + D_Q)^{-1},$$

$$\Pi(\lambda) = (\lambda I + D_Q)^{-1}S,$$

所以

$$\Pi(\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda + \lambda_0} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{1}{\lambda + \lambda_1} & 0 & \cdots \\ \cdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \lambda_0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \lambda_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{\lambda_0}{\lambda + \lambda_0} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{\lambda_1}{\lambda + \lambda_1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix},$$

$$\Pi^n(\lambda) = \begin{pmatrix} \overbrace{0 \ 0 \ \cdots \ 0}^{n \text{列}} & \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{n-1}}{(\lambda + \lambda_0) \cdots (\lambda + \lambda_{n-1})} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{\lambda_1 \cdots \lambda_n}{(\lambda + \lambda_1) \cdots (\lambda + \lambda_n)} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix},$$

因此,

$$R_n(\lambda) = \Pi^n(\lambda)(\lambda I + D_q)^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{n-1}}{(\lambda + \lambda_0) \cdots (\lambda + \lambda_{n-1})} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{\lambda_1 \cdots \lambda_n}{(\lambda + \lambda_1) \cdots (\lambda + \lambda_{n+1})} & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}.$$

故  $\bar{Q}(\lambda)$  是如定理 5.11 所指出的。

**定理 5.12.** 设  $Q$  是生过程转强阵。

(1) 若  $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} = \infty$ , 即是  $Q$  是有法的, 则其  $Q$ -过程是唯一的,

它就是  $\bar{R}(\lambda)$ 。

(2) 若  $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} < \infty$ , 即是  $m^+ = 1$ , 则其全部  $Q$ -过程为定理

4.12 中所确定的  $\mathscr{D}_1$ , 且这时  $\mathscr{D} = \mathscr{D}_1$  ( $\mathscr{D}$  之定义亦见定理 4.12)。

**证.** 而今  $Q$  是生过程转强阵, 所以  $l^+ = 0$ , 亦即  $\mathscr{D}_1$  只有零解, 所以由  $\Gamma$  及  $\Gamma_1$  之定义得  $\mathscr{D} = \mathscr{D}_1$ 。

如果我们仿照生灭过程作表的话, 我们有下表:

	$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} = \infty,$	$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} < \infty$
不间断、 $(B_i)$ 、 $(F_i)$ 的个数	1	0
间断、 $(B_i)$ 、 $(F_i)$ 的个数	0	1
不间断、 $(B_i)$ 、 $(\bar{F}_i)$ 的个数	0	$\infty$
间断、 $(B_i)$ 、 $(\bar{F}_i)$ 的个数	0	$\infty$
其它类型的个数	0	0

## §6. 分枝过程

考虑一个反应堆，假定在开始时有  $N$  个质点，由于它们相互碰撞及外来质点流的轰击，这些质点可能分裂。我们近似地假定其分裂服从下述规律：

- (1) 各质点的分裂情况是相互独立的；
- (2) 各质点的分裂情况与该质点的历史无关。

如果我们令  $X_t$  为时刻  $t$  该反应堆中的质点数，易证  $P(X_{s+t}=j | X_s=i) = p_{i,j}(t)$  不依赖  $s \geq 0$ ，此外， $P(t) = (p_{i,j}(t), i, j \geq 0)$  还满足下列方程组：

$$\begin{cases} p_{i,j}(t) = \sum_{\substack{i \\ \sum_{s=1}^i j_s = j}} \prod_{s=1}^i p_{1,j_s}(t), & (t \geq 0, i > 0, j \geq 0), \\ p_{0,j}(t) = \delta_{0,j}. \end{cases} \quad (6.1)$$

**定义6.1.** 满足(6.1)的(准)转概阵  $P(t) = (p_{i,j}(t), i, j \geq 0)$  称之为分枝(准)转概阵。

**命题6.1.** 对分枝准转概阵  $P(t)$  来说， $Q = (q_{i,j}) = P'(0)$  满足：

$$q_{i,j} = \begin{cases} 0, & j < i-1 \\ i q_{1,j-i+1}, & j \geq i-1. \end{cases} \quad (6.2)$$

**证** 若注意 (6.1) 及

$$\lim_{t \rightarrow 0+} p_{i,j}(t) = \delta_{i,j}$$

即可得：

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{1 - p_{i,j}(t)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{1 - (p_{1,j-i+1}(t))^i}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} i \cdot \frac{1 - p_{1,j-i+1}(t)}{t} = -i q_{1,j-i+1}, \end{aligned}$$

$i \neq j$  时,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{p_{i,j}(t)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{1}{t} \left( \sum_{\substack{j \\ \sum_{s=1}^i j_s = j}} \prod_{s=1}^i p_{1,j_s}(t) \right) \\ &= \begin{cases} \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{1}{t} (i p_{1,1}(t)^{i-1} p_{1,i-i+1}(t)), & j \geq i-1, \\ 0, & j < i-1, \end{cases} \\ &= \begin{cases} i q_{1,i-i+1}, & j \geq i-1, \\ 0, & j < i-1. \end{cases} \end{aligned}$$

**定义 6.2.** 设  $Q = (q_{i,j}, i, j \geq 0)$  是一个转强阵, 如果它满足 (6.2), 则称  $Q$  是一个分枝转强阵.

由命题 6.1 看出: 对任何分枝准转概阵来说, 如果  $p'_{i,1}(0) > -\infty, (i \in E)$ , 则其转强阵是分枝转强阵.

在这一节中, 我们首先研究分枝转强阵  $Q$  的  $Q$ -过程问题.

**定理 6.1.** 对任何分枝转强阵  $Q$  来说, 恒有  $l^+ = 0$ . ( $l^+$  的定义见命题 4.4.)

**证** 考虑  $\alpha'(\lambda I - Q) = 0$ , 即是,

$$(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots) \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots \\ -q_{1,0} & \lambda - q_{1,1} & -q_{1,2} & \dots \\ 0 & -2q_{1,0} & \lambda - 2q_{1,1} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = 0, \quad (6.3)$$

(1) 若  $q_{1,0} = 0$ , 则 (6.3) 显然只有零解, 所以  $l^+ = 0$ .

(2) 设  $q_{1,0} > 0$ , 令  $q_1 = -q_{1,1}$ . 由于  $\mathcal{L}_\lambda$  (定义见命题 4.4) 的维数不依赖于  $\lambda > 0$ , 所以下面对  $\lambda = 2q_{1,0} > 0$  来解 (6.3). 若 (6.3) 有非负非零解  $\alpha' = (\alpha_0, \alpha_1, \dots)$ , 则

$$\begin{aligned} \alpha_{k+1} &= \frac{1}{(k+1)q_{1,0}} [kq_1\alpha_k - (k-1)q_{1,2}\alpha_{k-1} - (k-2)q_{1,3}\alpha_{k-2} \\ &\quad - \dots - q_{1,k}\alpha_1 + \lambda\alpha_k] \end{aligned}$$



$$a_k = \frac{1}{kq_{1,0}} [(k-1)q_1 a_{k-1} - (k-2)q_{1,2} a_{k-2} - \dots \\ - q_{1,k-1} a_1 + \lambda a_{k-1}]$$

.....

$$a_2 = \frac{1}{2q_{1,0}} [q_1 a_1 + \lambda a_1]$$

因此,

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^{k+1} a_i &= \left( \frac{\lambda}{q_{1,0}} \sum_{j=1}^k \frac{a_j}{j+1} \right) + \frac{1}{q_{1,0}} \left[ \frac{k}{k+1} q_1 a_k \right. \\ &\quad + (k-1) \left( \frac{q_1}{k} - \frac{q_{1,2}}{k+1} \right) a_{k-1} \\ &\quad + (k-2) \left( \frac{q_1}{k-1} - \frac{q_{1,2}}{k} - \frac{q_{1,3}}{k+1} \right) a_{k-2} \\ &\quad + \dots + \left( \frac{q_1}{2} - \frac{q_{1,2}}{3} - \dots - \frac{q_{1,k}}{k+1} \right) a_1 \Big] \\ &\geq \left( \frac{\lambda}{q_{1,0}} \sum_{j=1}^k \frac{a_j}{j+1} \right) + \frac{1}{q_{1,0}} \left[ \frac{k}{k+1} q_1 a_k \right. \\ &\quad + (k-1) \frac{q_1 - q_{1,2}}{k} a_{k-1} \\ &\quad + (k-2) \frac{q_1 - q_{1,2} - q_{1,3}}{k-1} a_{k-2} \\ &\quad + \dots + \frac{q_1 - q_{1,2} - \dots - q_{1,k}}{2} a_1 \Big] \\ &\geq \left( \frac{\lambda}{q_{1,0}} \sum_{j=1}^k \frac{a_j}{j+1} \right) + \frac{1}{q_{1,0}} \left[ \frac{k}{k+1} q_{1,0} a_k \right. \\ &\quad + \frac{k-1}{k} q_{1,0} a_{k-1} + \dots + \frac{1}{2} q_{1,0} a_1 \Big] \\ &= 2 \sum_{j=1}^k \frac{a_j}{j+1} + \sum_{j=1}^k \frac{j a_j}{j+1} = \sum_{j=1}^k \frac{a_j}{j+1} + \sum_{j=1}^k a_j. \quad (6.4) \end{aligned}$$

在(6.4)中对 $k \rightarrow \infty$ 取极限得:

$$\sum_{j=2}^{\infty} a_j \geq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{j+1} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j, \quad (6.5)$$

而  $a' = (a_0, a_1, \dots) \geq 0$ ,  $a' \neq 0$ , 所以 (6.5) 只能当  $\sum_{j=1}^{\infty} a_j = \infty$  才能成立. 这就说明:

$$\langle\langle a'(\lambda I - Q) = 0, \quad 0 \leq a' \in (l) \rangle\rangle$$

只有零解, 亦即  $l^+ = 0$ .

下面我们研究空间  $\mathcal{M}_\lambda$  的结构.  $\mathcal{M}_\lambda$  的结构比  $\mathcal{L}_\lambda$  复杂.

**定理6.2.** 设  $Q = (q_{i,j}), i, j \geq 0$  是一个分枝转强阵, 令

$$f(s) = \sum_{j=0}^{\infty} q_{1,j} s^j, \quad (|s| \leq 1)$$

为其母函数.

(1) 若  $f(s)$  是  $M$  次多项式, 则总有  $m^+ = 0$ , ( $m^+$  的定义见命题 4.4);

(2) 若  $Q$  保守, 则  $m^+ = 0$  的充要条件是: 对任何  $\varepsilon > 0$ , 积分

$$\int_{1-\varepsilon}^1 \frac{1}{f(x)} dx$$

发散;

(3) 若  $Q$  非保守, 则  $m^+ = 0$ .

**证** (2)、(3) 请参见[20]引理12.7.3和引理12.7.4.

现在证明(1). 不妨设  $q_1 = -q_{1,1} > 0$  (否则, 对一切  $i, j \geq 0$ , 都有  $q_{i,j} = 0$ , 从而

$$(\lambda I - Q)y = 0, \quad (\lambda > 0)$$

即为  $\lambda y = 0, (\lambda > 0)$ , 故  $m^+ = 0$ ).

考虑方程式:

$$(\lambda I - Q)y = 0,$$

即是

$$\begin{aligned}
\lambda y_0 &= 0, \\
-q_{1,0}y_0 + (\lambda + q_1)y_1 - q_{1,2}y_2 - q_{1,3}y_3 - \cdots &= 0, \\
-2q_{1,0}y_1 + (\lambda + 2q_1)y_2 - 2q_{1,2}y_3 - \cdots &= 0, \\
-3q_{1,0}y_2 + (\lambda + 3q_1)y_3 - \cdots &= 0, \\
\cdots \cdots \cdots &\cdot
\end{aligned}$$

设  $y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \end{pmatrix}$  是上述方程组一个非负非零解。必有  $y_0 = 0$ 。令  $y_1, y_2,$

$\cdots$  中第一个大于0者为  $y_{K_1}$ 。考虑上述方程中第  $K_1 + 1$  式, 发现必有  $n$  满足

$$M + K_1 \geq n > K_1,$$

使得

$$y_n \geq \frac{\lambda + K_1 q_1}{K_1 q_1} y_{K_1}. \quad (6.6)$$

谬设对一切  $M + K_1 \geq n > K_1$ , 均有

$$y_n < \frac{\lambda + K_1 q_1}{K_1 q_1} y_{K_1}. \quad (6.7)$$

若注意  $f(s)$  是  $M$  次多项式, 则发现第  $(K_1 + 1)$  式即是

$$(\lambda + K_1 q_1)y_{K_1} - K_1 q_{1,2}y_{K_1+1} - \cdots - K_1 q_{1,M}y_{K_1+M-1} = 0.$$

由(6.7)及  $y_{K_1} > 0$  (从而必有某一个  $q_{1,K} > 0$ ,  $(K > 1)$ ) 得:

$$\begin{aligned}
& (\lambda + K_1 q_1)y_{K_1} - K_1 q_{1,2}y_{K_1+1} - \cdots - K_1 q_{1,M}y_{K_1+M-1} \\
& > (\lambda + K_1 q_1)y_{K_1} \left[ 1 - \frac{K_1 q_{1,2}}{K_1 q_1} - \cdots - \frac{K_1 q_{1,M}}{K_1 q_1} \right] \\
& \geq (\lambda + K_1 q_1)y_{K_1} q_{1,0} q_1^{-1} \geq 0.
\end{aligned}$$

此为不可能, 所以(6.6)成立。

令

$$K_2 = \min \left\{ n \mid y_n \geq \frac{\lambda + K_1 q_1}{K_1 q_1}, M + K_1 \geq n > K_1, \right\}. \quad (6.8)$$

再考察方程组中第  $K_2 + 1$  个方程式, 仿上, 发现必有  $n$  满足

$$M + K_2 \geq n > K_2,$$

使得,

$$y_n \geq \frac{\lambda + K_2 q_1}{K_2 q_1} y_{K_2}.$$

令

$$K_3 = \min \left\{ n \mid y_n \geq \frac{\lambda + K_2 q_1}{K_2 q_1} y_{K_2}, M + K_2 \geq n > K_2, \right\}.$$

如此继续下去, 我们得到一串严格上升的正整数  $\{K_m, m \geq 1\}$ , 使得:

$$0 < K_m - K_{m-1} \leq M, \quad (m \geq 2),$$

而且

$$\begin{aligned} y_{K_{m+1}} &\geq \left( \frac{\lambda + K_m q_1}{K_m q_1} \right) \cdots \left( \frac{\lambda + K_1 q_1}{K_1 q_1} \right) y_{K_1} \\ &= y_{K_1} \prod_{j=1}^m (1 + \rho_j), \end{aligned}$$

其中  $\rho_j = \frac{\lambda}{K_j q_1}.$

如果能证明  $\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n = \infty$ , 则  $\{y_k, k \geq 1\}$  无界, 从而  $m^* = 0$ . 事实上, 由于

$$K_1 < K_m \leq K_1 + mM, \quad (m > 1),$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda}{q_1} \left( \frac{1}{K_n} \right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda}{q_1} \frac{1}{K_1 + mM},$$

而今  $K_1, M, \lambda, q_1$  均为常数, 故  $\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n = \infty$ . 定理得证.

现在我们问: 任给一个分枝转强阵  $Q$ , 分枝  $Q$ ——过程是否存在, (即是满足(6.1)的  $Q$ ——过程)? 如存在, 是否唯一?

**定理6.3.** 任给一个分枝转强阵  $Q = (q_{i,j}, i, j \geq 0)$ , 令  $f(s) = \sum_{j=0}^{\infty} q_{1,j} s^j$  为其母函数, 则

(1) 任何一个分枝  $Q$ -过程  $P(t) = (p_{i,j}(t), i, j \geq 0)$  的母函数  $F(t, x) = \sum_{j=0}^{\infty} p_{1,j}(t) x^j$ , ( $|x| \leq 1$ ) 必满足

$$\begin{cases} \frac{\partial F(t, x)}{\partial t} = f(F(t, x)), & (|x| \leq 1, t \geq 0), \\ F(0, x) = x, \end{cases} \quad (6.9)$$

(从而最多只有一个分枝  $Q$ -过程);

(2) (6.9) 的解  $F(t, x)$  是分枝  $Q$ -过程的母函数的充要条件是:

$$\left( \frac{\partial^k}{\partial x^k} F(t, x) \right)_{x=0} \geq 0, \quad F(t, 1) \leq 1, \quad (t \geq 0, k \geq 0), \quad (6.10)$$

(3) 对任一分枝转强阵  $Q$ , 恒存在唯一的一个分枝  $Q$ -过程, 它就是定理4.3中的最小  $Q$ -过程.

**证** (3)即是[20]引理12.7.1.

下面只证明(1)和(2). 在证明(1)、(2)之前我们先证明几个引理.

**引理6.1.**  $F(t, x)$  决定唯一的一个分枝准转概阵  $P(t) = (p_{i,j}(t))$  使它满足

$$F(t, x) = \sum_{j=0}^{\infty} p_{1,j}(t) x^j \quad (t \geq 0, |x| \leq 1)$$

的充要条件是:

(i)  $F(t, x)$  在  $t \geq 0, |x| \leq 1$  上定义而且是  $(t, x)$  的二元连续函数, 此外, 固定  $t \geq 0$ ,  $F(t, \cdot)$  还在  $|x| < 1$  内解析;

(ii)  $F(0, x) \equiv x, F(t, 1) \leq 1, \left( \frac{\partial^k}{\partial x^k} F(t, x) \right)_{x=0} \geq 0,$

$(t \geq 0, k \geq 0)$ ;

(iii)  $F(s+t, x) = F(t, F(s, x))$ ,  $(s \geq 0, t \geq 0, |x| \leq 1)$ ;

(iv)  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \left( \frac{\partial^k}{\partial x^k} F(t, x) \right)_{x=0} = k! \delta_{1,k}$ ,  $(k \geq 0)$ .

证 必要性. 设  $P(t) = (p_{i,j}(t))$  是一个分枝准转概阵,

$F(t, x) = \sum_{j=0}^{\infty} p_{1,j}(t) x^j$ ,  $(|x| \leq 1, t \geq 0)$ . 则显然  $F(t, x)$  满足

(i), (ii), (iv) 下面证明 (iii).

$$\begin{aligned} F(s+t, x) &= \sum_{j=0}^{\infty} p_{1,j}(s+t) x^j \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} p_{1,k}(t) p_{k,i}(s) x^i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} p_{1,k}(t) \sum_{\substack{j_1+\dots+j_k=i \\ j_l \geq 1}} \prod_{l=1}^k p_{1,j_l}(s) x^{j_l} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} p_{1,k}(t) F(s, x)^k \\ &= F(t, F(s, x)). \end{aligned}$$

充分性. 令

$$F^i(t, x) = \sum_{j=0}^{\infty} p_{i,j}(t) x^j, \quad (t \geq 0, |x| \leq 1).$$

往证  $P(t) = (p_{i,j}(t))$  是一个分枝准转概阵. 事实上, 由 (ii) 得  $P(t) \geq 0$ ,  $P(t) \mathbf{1} \leq \mathbf{1}$ . 由 (iii) 得

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} p_{i,j}(s+t) x^j &= F^i(s+t, x) \\ &= (F(s, F(t, x)))^i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{\infty} p_{i,j}(s) F^j(t, x) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} p_{i,j}(s) \sum_{k=0}^{\infty} p_{j,k}(t) x^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^{\infty} p_{i,j}(s) p_{j,k}(t) \right) x^k. \quad (i \geq 0).
\end{aligned}$$

此即

$$P(s+t) = P(s)P(t).$$

由(iv)可得

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} P(t) = I.$$

由 $P(t)$ 的定义立即可以看出 $P(t)$ 满足(6.1). 至此引理6.1证毕.

**引理6.2.** 设 $Q$ 是一个分枝转强阵.  $F(t, x)$  决定唯一一个分枝 $Q$ -过程 $P(t) = (p_{i,j}(t))$ 满足

$$F(t, x) = \sum_{j=0}^{\infty} p_{1,j}(t) x^j, \quad (t \geq 0, |x| \leq 1)$$

的充要条件是引理6.1中的(i)–(iii)和

$$(iv)^* \left( \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^k}{\partial x^k} F(t, x) \right)_{\substack{x=0 \\ t=0}} = k! q_{1,k}.$$

为了证明引理6.2, 只需注意(iv)\*蕴含了(iv), 则由引理6.1立即得到引理6.2.

**引理6.3.** 设 $Q$ 是一个分枝转强阵,  $P(t)$ 是一个分枝 $Q$ -过程,

$$F(t, x) = \sum_{j=1}^{\infty} p_{1,j}(t) x^j, \quad f(s) = \sum_{j=0}^{\infty} q_{1,j} s^j, \quad \text{则当 } \Delta t \rightarrow 0^+ \text{ 时有}$$

$$F(t + \Delta t, x) = F(t, x) + f(F(t, x)) \Delta t + o(\Delta t).$$

**证** 由于 $F(t, x)$ 在 $|x| < 1$ 内解析, 所以当 $|x| < 1$ 时有

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k} F(t, x) = \sum_{j=k}^{\infty} p_{1,j}(t) j(j-1)\cdots(j-k+1) x^{j-k}.$$

若注意

$$\lim_{j \rightarrow \infty} j(j-1)\cdots(j-k+1)x^{j-k} = 0, \quad (|x| < 1)$$

及 
$$\sum_{j=0}^{\infty} |p'_{1,j}(t)| \leqslant 2q_{1,1}, \quad (t \geqslant 0)$$

则可得:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^k}{\partial x^k} F(t, x) = \sum_{j=k}^{\infty} p'_{1,j}(t) j(j-1)\cdots(j-k+1) x^{j-k}$$

在  $t \geqslant 0, |x| < 1$  连续, 所以

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial t} F(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^k}{\partial x^k} F(t, x).$$

因此,

$$\left( \frac{\partial^k}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial t} F(t, x) \right)_{\substack{t=0 \\ x=0}} = f^{(k)}(0),$$

此即

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} F(t, x) \right)_{t=0} = f(x).$$

所以, 当  $\Delta t \rightarrow 0^+$  时有

$$\begin{aligned} F(t + \Delta t, x) &= F(\Delta t, F(t, x)) \\ &= F(t, x) + f(F(t, x)) \Delta t + o(\Delta t). \end{aligned}$$

至此, 引理6.3证毕.

现在, 我们利用引理6.1—6.3来证明定理6.3.

**证** 由于  $f(s)$  在  $|s| < 1$  内解析, 所以方程式(6.9) 恰有唯一一个解  $F(t, x)$ , 而且  $F(t, x)$  在  $|x| < 1$  内解析. 因此, 为了证明定理6.3, 只须证明两点: (1) 任何一个满足引理6.2中的条件的函数都是(6.9)的解; (2) 如果(6.9)的解  $F(t, x)$  满足(6.10), 则  $F(t, x)$  确定唯一一个分枝  $Q$ —过程  $P(t) = (p_{i,j}(t))$ , 使:

$$F(t, x) = \sum_{j=0}^{\infty} p_{1,j}(t) x^j, \quad (t \geqslant 0, |x| \leqslant 1).$$



(1) 可以从引理6.3中直接得出. 下面证明(2) 设 $F(t, x)$ 是(6.9)的解, 则 $F(t, x)$ 显然满足引理6.1中的(i), 至于(iii), 若令

$$g_1(t) = F(s+t, x), \quad g_2(t) = F(t, F(s, x)),$$

则 $g_1, g_2$ 均为

$$\begin{cases} \frac{dg(t)}{dt} = f(g(t)), & (t \geq 0), \\ g(0) = F(s, x), \end{cases}$$

的解, 故 $g_1(t) \equiv g_2(t), \quad (t \geq 0)$ , 亦即(iii)成立.

又因为

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial t} F(t, x) = \frac{\partial^k}{\partial x^k} f(F(t, x))$$

在 $t$ 和 $x$ 充分小的区域上连续, 故

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^k}{\partial x^k} F(t, x) \right)_{\substack{x=0 \\ t=0}} &= \left( \frac{\partial^k}{\partial x^k} f(F(0, x)) \right)_{x=0} \\ &= \left( \frac{\partial^k}{\partial x^k} f(x) \right)_{x=0} = k! \cdot q_{1,k}, \\ &\quad (k=0, 1, \dots). \end{aligned}$$

此即(iv)\*成立. 最后由于 $F(0, x) = x$ 及(6.10)知(ii)成立. 由引理6.2得知(2)成立, 故定理得证.

**例6.1.** 令 $Q = (q_{ij}, i, j \geq 0)$ 是一个分枝转强阵, 且令

$$q_{10} = a > 0, q_{12} = b > 0, q_{11} = -(a+b), q_{1j} = 0, (j \geq 3).$$

$$f(s) = \sum_{j=0}^{\infty} q_{1j} s^j = a - (a+b)s + bs^2.$$

解

$$\begin{cases} \frac{\partial F(t, x)}{\partial t} = f(F(t, x)), & (|x| \leq 1, t \geq 0), \\ F(0, x), & (|x| \leq 1) \end{cases}$$

得:

$$F(t, x) = \begin{cases} 1 - \frac{1-x}{1-(1-x)at}, & (a=b), \\ \frac{a(1-x) + (bx-a)e^{(a-b)t}}{b(1-x) + (bx-a)e^{(a-b)t}}, & (a \neq b). \end{cases}$$

容易看出:  $F(t, x)$  确定了唯一的一个分枝  $Q$ -过程  $P(t)$  满足

$$F(t, x) = \sum_{j=0}^{\infty} p_{1,j}(t)x^j, \quad (|x| \leq 1, t \geq 0).$$

由定理 6.2(1), 知  $m^+ = 0$ , 又因为现在的  $Q$  是保守的, 所以由定理 4.5 得知  $Q$ -过程是唯一的, 它就是  $P(t)$ .

下面我们要研究不同的主题了。

**定理 6.4.** 设  $Q$  是一个分枝转强阵,  $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} q_{1,j}x^j$  为其母函数,  $P(t)$  是分枝  $Q$ -过程.

(1) 若  $f(x) \equiv 0$ , ( $|x| \leq 1$ ), 则  $P(t) \equiv I$ , ( $t \geq 0$ ), 更有  $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \Pi = I$ ,

(2) 若  $f(x) \neq 0$ , ( $|x| \leq 1$ ), (从而  $q_{1,1} < 0$ )

则

$$\Pi = \lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \rho & 0 & 0 & \cdots \\ \rho^2 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

其中  $\rho$  是

$$f(x) = 0$$

的最靠近 0 的那一个非负根, 而且  $f'(1) > 0$  时  $\rho < 1$ , 特别地, 当  $f(1) = 0$  时,  $\rho = 1$  的充要条件是  $f'(1) \leq 0$ , 其中

$$f'(1) = \sum_{j=1}^{\infty} q_{1,j}.$$

证 (1) 令  $F(t, x) = \sum_{j=0}^{\infty} p_{1,j}(t)x^j$ , ( $t \geq 0$ ,  $|x| \leq 1$ ) 为

$P(t)$  的母函数, 若  $f(x) \equiv 0$ , ( $|x| \leq 1$ ), 则由定理 6.3 得知

$$F(t, x) \equiv g(x) \quad (|x| \leq 1)$$

不依赖  $t \geq 0$ , 但是  $F(0, x) \equiv x$ , 所以

$$P(t) = I.$$

(2) 设  $P(t)1 \equiv 1$  ( $t \geq 0$ ),  $f(x) \equiv 0$ , ( $|x| \leq 1$ ), 则  $q_{1,1} < 0$ , 所以  $p_{1,1}(t) \equiv 1$ , ( $t \geq 0$ ). 但是  $p_{1,1}(0) = 1$ , 因此, 必存在  $t_0 > 0$ , 使  $p_{1,1}(t_0) < 1$ . 令  $P^* = P(t_0)$ ,  $\{X_n, n \geq 0\}$  是以  $P^*$  为转移阵的可数状态的时齐的马尔可夫链. 由  $p_{1,1}(t_0) < 1$  得知: 必有  $p_{1,0}(t_0) > 0$  或者  $p_{1,k_0}(t_0) > 0$  (对某一个  $k_0 > 1$ ). 若  $p_{1,0}(t_0) > 0$ , 则对  $i \geq 1$  有

$$\begin{aligned} & P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} \{X_m = i\} \mid X_0 = i\right) \\ &= 1 - P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} \{X_m \neq i\} \mid X_0 = i\right) \\ &\leq 1 - P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} \{X_m = 0\} \mid X_0 = i\right) \\ &\leq 1 - p_{i,0}(t_0) = 1 - (p_{1,0}(t_0))^i < 1. \end{aligned}$$

若  $p_{1,k_0}(t_0) > 0$ ,  $p_{1,0}(t_0) = 0$ , 则对  $i \geq 1$  也有

$$\begin{aligned} & P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} \{X_m = i\} \mid X_0 = i\right) \\ &\leq 1 - P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} \{X_m \geq k_0 i\} \mid X_0 = i\right) \\ &\leq 1 - (p_{1,k_0}(t_0))^i < 1. \end{aligned}$$

所以, 只要  $p_{1,1}(t_0) < 1$ , 就有

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} \{X_m = i\} \mid X_0 = i\right) < 1, \quad (i \geq 1).$$

因此, 由第一篇定理4.2(1)得知:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = 0, \quad (i \geq 0, j \geq 1),$$

其中  $P^{*n} = (p_{ij}^{(n)}), i, j \geq 0$ .

但  $P^{*n} = P(nt_0)$ , 所以, 若令  $H = (\pi_{ij}), i, j \geq 0$ , 则必有  $\pi_{ij} = 0, (i \geq 0, j \geq 1)$ .

若  $P(t)1 \equiv 1, (t \geq 0), f(x) \equiv 0, (|x| \leq 1)$ . 基于命题4.1同样可证  $\pi_{ij} = 0, (i \geq 0, j \geq 1)$ .

下面我们证明  $\rho$  是  $f(x) = 0$  的最靠近0的一个非负根.

由于  $f''(x)$  在  $[0, 1]$  上非负, 所以  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上是向下凸的函数, 因此  $f(x) = 0$  在  $[0, 1]$  上不会多于两个根. 令  $\lambda$  是  $f(x) = 0$  的最靠近零的一个根.

(a) 若  $\lambda = 0$ , 即是  $f(0) = 0$ , 由

$$\begin{cases} p'_{1,0}(t) = \frac{d}{dt} F(t, 0) = f(F(t, 0)) = f(p_{1,0}(t)), (t \geq 0), \\ p_{1,0}(0) = 0 \end{cases}$$

(6.12)

得知  $p_{1,0}(t) \equiv 0, (t \geq 0)$ , 更有

$$\pi_{i,0} = \lim_{t \rightarrow \infty} (p_{1,0}(t))^i = 0 = \lambda \quad (i \geq 1).$$

(b) 若  $\lambda > 0$ , 则  $f(0) > 0$ , 所以

$$f(x) > 0, \quad (0 \leq x < \lambda).$$

显然,

$$p_{1,0}(s+t) \geq p_{1,0}(t)p_{0,0}(s) = p_{1,0}(t), \quad (s \geq 0, t \geq 0),$$

此即  $p_{1,0}(t)$  在  $[0, \infty)$  上是  $t$  的单调上升函数. 令

$$\rho = \lim_{t \rightarrow \infty} p_{1,0}(t) = \sup_{t \geq 0} p_{1,0}(t).$$

由定理3.6及(6.12)有

$$0 = \lim_{t \rightarrow \infty} p'_{1,0}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(p_{1,0}(t)) = f(\rho).$$

所以  $\rho \geq \lambda$ .

谬设  $\rho > \lambda$ . 则必存在  $\lambda' \in (\lambda, \rho)$ , 使  $f(\lambda') < 0$ . 但是  $p_{1,0}(t)$  是  $t$  的连续函数, 故必有  $t'$  使  $p_{1,0}(t') = \lambda'$ . 故

$$p'_{1,0}(t') = f(p_{1,0}(t')) = f(\lambda') < 0,$$

这与  $p_{1,0}(t)$  在  $[0, \infty)$  上单调上升矛盾, 故  $\rho = \lambda$ . 显然

$$\pi_{i,0} = \lim_{t \rightarrow \infty} p_{i,0}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (p_{1,0}(t))^i = \rho^i, \quad (i \geq 0).$$

最后我们证明:  $\rho$  与  $f'(1)$  的关系.

(a) 设  $f'(1) > 0$ . 由于  $f(1) \leq 0$ , 所以必有  $0 < \lambda' < 1$ , 使  $f(\lambda') < 0$ . 而  $f(0) = q_{1,0} \geq 0$ ,  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上是连续函数, 所以, 必有  $\lambda < 1$ , 使  $f(\lambda) = 0$ . 故  $\rho < 1$ .

(b) 设  $f'(1) \leq 0$ ,  $f(1) = 0$ . 则当  $x \in (0, 1)$  时有

$$f'(x) = \sum_{i=1}^{\infty} i q_{1,i} x^{i-1} \leq f'(1) \leq 0.$$

谬设  $f(0) = q_{1,0} = 0$ , 则

$$q_{1,1} + 2q_{1,2} + \cdots = f'(1) \leq 0,$$

而  $f(1) = 0$ , 即是

$$q_{1,1} + q_{1,2} + \cdots = 0,$$

所以

$$q_{1,2} + 2q_{1,3} + \cdots = 0.$$

但是  $q_{1,i} \geq 0$ , ( $i \geq 2$ ), 所以  $q_{1,i} \equiv 0$ , ( $i \geq 2$ ). 因此由  $f(1) = 0$  得  $q_{1,1} = 0$ . 这与  $f(x) \equiv 0$  (从而  $q_{1,1} < 0$ ) 这一假设矛盾. 所以  $f(0) > 0$ . 再注意  $f'(x) \leq 0$ , ( $x \in [0, 1]$ ) 及  $f(1) = 0$  得知  $f(x) = 0$  在  $[0, 1]$  上以且仅以 1 为根. 故  $\rho = 1$ . 至此, 定理 6.4 证毕.

### 第三篇 非时齐的准转概阵 的分析理论

#### § 1. 连续性及可微性

**定义1.1.** 设 $E$ 为一可数集(不妨令 $E$ 为非负整数集),  $\mathbf{T}=[0, \infty)$ , 定义在 $E$ 上的依赖二参数 $s$ 和 $t$  ( $0 \leq s \leq t < \infty$ )的实值矩阵 $P(s, t) = (p_{i,j}(s, t), i, j \in E)$  称为一个非时齐的准转概阵, 如果它满足

$$(1) \quad p_{i,j}(s, t) \geq 0, \quad \sum_{j \in E} p_{i,j}(s, t) \leq 1, \quad (1.1)$$

$$(i, j \in E, \quad 0 \leq s \leq t < \infty);$$

$$(2) \quad p_{i,j}(s, s+t+u) = \sum_{k \in E} p_{i,k}(s, s+t) p_{k,j}(s+t, s+t+u), \quad (1.2)$$

( $i, j \in E, \quad 0 \leq s, t, u < \infty$ ), 此式通常称为 (K-C) 方程式;

$$(3) \quad \limsup_{h \rightarrow 0+} \sup_{s \in [0, b]} |p_{i,j}(s, s+h) - \delta_{i,j}| = 0, \quad p_{i,j}(t, t) = \delta_{i,j}, \quad (1.3)$$

$$(i, j \in E, \quad 0 \leq t < \infty, \quad 0 \leq b < \infty),$$

其中

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

记  $\delta_{i,A} = \sum_{j \in A} \delta_{i,j}$ ,  $p_{i,A}(s, t) = \sum_{j \in A} p_{i,j}(s, t)$ , ( $i \in E, A \subset E$ ).

容易证明: (3) 等价于下列条件中任一条:

$$(3)' \limsup_{h \rightarrow 0+} \sup_{h \leq s \leq b} |p_{i,j}(s-h, s) - \delta_{i,j}| = 0,$$

$$p_{i,j}(t, t) = \delta_{i,j},$$

$$(0 \leq t < \infty, 0 \leq b < \infty, i, j \in E),$$

$$(3)'' \limsup_{h \rightarrow 0+} \sup_{0 \leq s \leq b} (1 - p_{i,j}(s, s+h)) = 0,$$

$$p_{i,j}(t, t) = \delta_{i,j},$$

$$(0 \leq t < \infty, 0 \leq b < \infty, i, j \in E),$$

$$(3)''' \lim_{\substack{(t-s) \rightarrow 0+ \\ 0 \leq s \leq t \leq b}} p_{i,j}(s, t) = p_{i,j}(u, u) = \delta_{i,j},$$

$$(u \geq 0, b > 0, i, j \in E).$$

称非时齐的准转概阵  $P(s, t)$  为非时齐的转概阵, 如果  $P(s, t)1 \equiv 1$ . 科学地说, 非时齐的 (准) 转概阵应称为不一定时齐的 (准) 转概阵, 但习惯已称 “非时齐”, 故按习惯称 “非时齐”.

**定理 1.1.** 对任何非时齐的准转概阵,  $P(s, t) = (p_{i,j}(s, t), i, j \in E)$ , 恒有

$$(1) p_{i,j}(s, t) > 0, (i \in E, 0 \leq s \leq t < \infty);$$

$$(2) |p_{i,J}(u, t) - p_{i,J}(v, t)| \leq 1 - p_{i,i}(u \wedge v, u \vee v), (i \in E, J \subset E, 0 \leq u, v \leq t), \text{ 其中 } u \wedge v = \min(u, v), u \vee v = \max(u, v);$$

**证** (1) 由 (K-C) 方程式知

$$p_{i,j}(s, t) \geq \prod_{k=1}^n p_{i,i}(s + \frac{k-1}{n}(t-s), s + \frac{k}{n}(t-s)),$$

再用 (1.3) 即得 (1).

(2) 不失普遍性, 可令  $u \leq v \leq t$ , 由 (K-C) 方程式有

$$\begin{aligned} p_{i,J}(u, t) - p_{i,J}(v, t) &\geq (p_{i,i}(u, v) - 1)p_{i,J}(v, t) \\ &\geq p_{i,i}(u, v) - 1, \end{aligned}$$

$$p_{i,J}(u, t) - p_{i,J}(v, t) \leq \sum_{k \neq i} p_{i,k}(u, v)p_{k,J}(v, t)$$

$$\leq \sum_{k \neq i} p_{i,k}(u, v) \leq 1 - p_{i,i}(u, v),$$

由上述两个不等式即得(2)。

**定理1.2.** 对任何非时齐的准转概阵 $P(s, t)$ , 均有:

(1)  $p_{i,j}(s, t)$ 对 $s$ 来说在 $[0, t]$ 上连续, (在0点只是右连续, 在 $t$ 点只是左连续), 而且此种连续对 $t \geq 0$ 和 $J \subset E$ 是等度的;

(2)  $p_{i,j}(s, t)$ 对 $t$ 来说在 $[s, \infty)$ 上右连续, 而且此种连续对 $J \subset E$ 来说是等度的。

特别地, 若 $P(s, t)$ 还满足

$$\lim_{\substack{(t-s) \rightarrow 0+ \\ 0 \leq s \leq t \leq b}} \sup_{i \in E} (1 - p_{i,i}(s, t)) = 0, \quad (b > 0), \quad (1.3)^*$$

则  $p_{i,j}(s, t)$  作为 $(s, t)$ 的二元函数在  $\mathscr{D}^* = \{(u, v) | 0 \leq u \leq v < \infty\}$  上连续。

**证** (1) 由定理1.1的(2)并注意(1.3)即得(1)。

(2) 利用(K-C)方程式可证, 对任何  $h > 0$  有

$$|p_{i,j}(s, t+h) - p_{i,j}(s, t)| \leq \sum_{k \in E} p_{i,k}(s, t) \cdot (1 - p_{k,k}(t, t+h)),$$

所以, 用(1.3)及控制收敛定理即得(2)。

特别地, 若(1.3)\*成立, 则必有: 对任何 $b > 0$ ,

$$\lim_{\substack{(t-s) \rightarrow 0+ \\ 0 \leq s \leq t \leq b}} p_{i,j}(s, t) = p_{i,j}(u, u) = \delta_{i,j},$$

对  $i \in E$  一致成立。又因为  $\sum_{i \in E} p_{i,j}(s, u) \leq 1$ , 所以若令  $\delta_{i,j}$

$$= \sum_{i \in J} \delta_{i,i}, \quad i \in E, \quad J \subset E, \quad \text{则有}$$

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{u \rightarrow v \rightarrow 0 \\ s \leq u < v \leq b}} (p_{i,j}(s, v) - p_{i,j}(s, u)) \\ &= \lim_{\substack{u \rightarrow v \rightarrow 0 \\ s \leq u < v \leq b}} \sum_{k \in E} p_{i,k}(s, u) (p_{k,j}(u, v) - \delta_{k,j}) = 0. \end{aligned}$$

此即  $p_{i,j}(s, t)$  作为 $t$ 的函数在 $(s, b]$ 上左连续, 由 $b > 0$ 可任意知在 $(s, \infty)$ 上左连续。既然  $p_{i,j}(s, t)$  在 $\mathscr{D}^*$ 上作为 $s, t$ 的一元函数皆连



续, 而作为  $s$  的连续函数来说, 对  $t$  还是等度的, 故  $p_{i,j}(s, t)$  在  $\mathcal{D}^*$  上是  $(s, t)$  的二元连续函数.

**系1.** 对任何非时齐的准转概阵  $P(s, t)$  来说,  $p_{i,j}(s, t)$  在  $\mathcal{D}^*$  上是  $(s, t)$  的二维波勒尔可测函数.

下面我们研究非时齐的准转概阵  $P(s, t)$  (对  $s, t$ ) 的可微性. 为此, 我们需要作一些准备工作.

**引理1.1.** 若  $0 \leq \beta \leq 1$ ,  $0 \leq a_i \leq 1$ , ( $i=1, 2, \dots, n$ ), 则

$$1 - \beta \sum_{i=1}^n (1 - a_i) \leq (1 - \beta) + \beta \prod_{i=1}^n a_i. \quad (1.4)$$

**证** 对  $n$  作归纳法.  $n=1$  时, (1.4) 显然成立, 设  $n=k$  时 (1.4) 成立, 则

$$\begin{aligned} 1 - \beta \sum_{i=1}^{k+1} (1 - a_i) &\leq 1 - \beta(1 - a_{k+1}) + (1 - \beta) + \beta \prod_{i=1}^k a_i \\ &= (1 - \beta) + \beta \prod_{i=1}^{k+1} a_i + \beta(1 - a_{k+1}) \prod_{i=1}^k a_i - \beta(1 - a_{k+1}) \\ &\leq (1 - \beta) + \beta \prod_{i=1}^{k+1} a_i. \end{aligned}$$

**引理1.2.** 存在  $\alpha_0 \in (0, 1)$  使  $\alpha \in [\alpha_0, 1]$ ,  $0 < \varepsilon < \frac{1}{16}$  时有

$$(\alpha - 8\varepsilon)/(1 - 8\varepsilon) \geq \alpha^{(1+18\varepsilon)}. \quad (1.5)$$

**证** 由  $\lim_{\alpha \rightarrow 1} \left[ \log \frac{\alpha - 8\varepsilon}{1 - 8\varepsilon} / \log \alpha \right] = \frac{1}{1 - 8\varepsilon}$

得知: 存在  $\alpha_0 \in (8\varepsilon, 1)$ , 使  $\alpha_0 \leq \alpha < 1$  时有

$$\log \frac{\alpha - 8\varepsilon}{1 - 8\varepsilon} / \log \alpha \leq \frac{1}{1 - 8\varepsilon} + \varepsilon \leq 1 + 18\varepsilon.$$

又因为  $\log \alpha < 0$ , 故  $\log \frac{\alpha - 8\varepsilon}{1 - 8\varepsilon} \geq \log \alpha^{(1+18\varepsilon)}$ , 此即  $\alpha \in [\alpha_0, 1)$  时, (1.5) 成立, 而  $\alpha = 1$  时 (1.5) 显然成立. 引理证毕.

**定义1.2.** 设 $[a, \beta]$ 是任一区间,  $a = a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n = \beta$ , 则称 $\mathcal{D}(a, \beta) = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ 是 $[a, \beta]$ 的一个分割,  $\max_{1 \leq k \leq n} (a_k - a_{k-1})$ 称为 $\mathcal{D}$ 的直径, 用 $l(\mathcal{D})$ 表之. 若还有分割 $\mathcal{D}'(a, \beta) = \{a'_0, a'_1, \dots, a'_m\}$ , 令 $\beta_0 = a_0 = a'_0 = a$ ,  $\beta_k = \min\{a_p, a'_q \mid a_p > \beta_{k-1}, a'_q > \beta_{k-1}\}$ , 若 $\{a_p, a'_q \mid a_p > \beta_{k-1}, a'_q > \beta_{k-1}\}$ 非空, 反之定义 $\beta_k = \beta_{k-1}$ , ( $k=1, 2, \dots, m+n+1$ ). 称新分割 $\{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{m+n+1}\}$ 是 $\mathcal{D}$ 与 $\mathcal{D}'$ 之并, 记之为 $\mathcal{D} \cup \mathcal{D}'$ . 若集合 $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ 含于 $\{a'_0, a'_1, \dots, a'_m\}$ 之中, 则称 $\mathcal{D}'$ 是 $\mathcal{D}$ 的“加细”, 或称 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{D}'$ 的子分割, 记之为 $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}'$ . 显然 $\mathcal{D} \cup \mathcal{D}'$ 是 $\mathcal{D}(\mathcal{D}')$ 之加细.

**定义1.3.** 设 $f(s, t)$ 是定义在 $a \leq s \leq t \leq b$ 上的非负实值函数,  $f(t, t) \equiv 0$ , ( $a \leq t \leq b$ ), 对任何 $[a, \beta] \subset [a, b]$ , 及 $\mathcal{D}(a, \beta) = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ , 记 $\sigma_f(\mathcal{D}(a, \beta)) = \sum_{k=1}^n f(a_{k-1}, a_k)$ . 称

$\sup_{\text{一切 } \mathcal{D}(a, \beta)} \sigma_f(\mathcal{D}(a, \beta))$ 为 $f$ 在 $[a, \beta]$ 上的全叠积, 用 $V_f(a, \beta)$ 记之, 如无混淆, 简记之为 $V(a, \beta)$ . 若 $V_f(a, \beta) < \infty$ , 则称 $f$ 在 $[a, \beta]$ 上是有界叠积. 若 $\lim_{l(\mathcal{D}) \rightarrow 0} \sigma_f(\mathcal{D}(a, \beta))$ 存在, 则称 $f$ 在 $[a, \beta]$ 上的“微积”存在, 记此极限为 $I_f(a, \beta)$ . 若对任何 $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}'$ , 都有 $\sigma_f(\mathcal{D}(a, \beta)) \leq \sigma_f(\mathcal{D}'(a, \beta))$ , 则称 $\sigma_f(\cdot)$ 在 $D_a^b = \{\text{一切分割 } \mathcal{D}(a, \beta)\}$ 上单调非降, 仿之可定义单调非升.

**引理1.3.** 设 $f(s, t)$ 是定义在 $a \leq s \leq t \leq b$ 上的非负实值函数,  $f(t, t) \equiv 0$ , 若 $I_f(a, b)$ 存在且有限, 则

- (1)  $I_f(c, d)$ 存在且 $\leq I_f(a, b)$ , ( $a \leq c \leq d \leq b$ ),
- (2)  $I_f(c, c) = 0$ ,  $I_f(c, d) = I_f(c, a) + I_f(a, d)$ , ( $a \leq c \leq a \leq d \leq b$ ).

**证** 由 $I_f(s, t)$ 之定义立即可得.

**引理1.4.** 对任何非时齐准转概阵 $P(s, t)$ , 令

$$f(s, t) = -\log p_{ii}(s, t), \quad (1.6)$$

则

- (1)  $\sigma_f(\cdot)$  在  $D_f'$  上单调非降,  $(0 \leq s < t < \infty)$ ;  
 (2)  $I_f(s, t)$  存在且等于  $V_f(s, t)$ ,  $(0 \leq s < t < \infty)$ ;  
 (3)  $f(s, t) \leq I_f(s, t)$ ,  $(0 \leq s < t < \infty)$ . (1.7)

证 (1) 由定理 1.1 知  $f(s, t)$  是非负实值函数且  $f(t, t) \equiv 0$ , 再用 (K-C) 方程式立得 (1).

(2) 显然

$$\limsup_{l(\mathscr{D}) \rightarrow 0} \sigma_f(\mathscr{D}(s, t)) \leq V_f(s, t).$$

设

$$\liminf_{l(\mathscr{D}) \rightarrow 0} \sigma_f(\mathscr{D}(s, t)) < V_f(s, t) = \sup_{\text{一切 } \mathscr{D}} \sigma_f(\mathscr{D}(s, t)),$$

则必存在一个分割  $\mathscr{D}_0$  及一串分割  $\{\mathscr{D}_n\}$ , 使

$$l(\mathscr{D}_n) \rightarrow 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_f(\mathscr{D}_n(s, t)) < \sigma_f(\mathscr{D}_0(s, t)). \quad (1.8)$$

令  $\mathscr{D}_n(s, t) = \{s_0^{(n)}, s_1^{(n)}, \dots, s_{k(n)}^{(n)}\}$ ,  $\mathscr{D}_0(s, t) = \{s_0, s_1, \dots, s_{k(0)}\}$ ,  $l^{(n)}(j) = \min\{i | s_i^{(n)} \geq s_j\}$ ,  $j = 1, 2, \dots, k(0) - 1$ , 则有

$$\begin{aligned} \sigma_f((\mathscr{D}_n \cup \mathscr{D}_0)(s, t)) &= \sigma_f(\mathscr{D}_n(s, t)) \\ &+ \sum_{j=1}^{k(0)-1} [f(s_{l^{(n)}(j)}^{(n)}, s_j) + f(s_j, s_{l^{(n)}(j)}^{(n)}) \\ &- f(s_{l^{(n)}(j)-1}^{(n)}, s_{l^{(n)}(j)}^{(n)})], \end{aligned}$$

由 (1.3) 有

$$\lim_{\substack{0 \leq s < t \leq b \\ l(\mathscr{D}) \rightarrow 0}} f(s, t) = 0.$$

若再注意  $\lim_{n \rightarrow \infty} l(\mathscr{D}_n) = 0$  和

$$\begin{aligned} \max \{ (s_{l^{(n)}(j)}^{(n)} - s_j), (s_{l^{(n)}(j)}^{(n)} - s_{l^{(n)}(j)-1}^{(n)}), \\ (s_j - s_{l^{(n)}(j)-1}^{(n)}) \} \leq l(\mathscr{D}_n), \end{aligned}$$

可得

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sigma_f((\mathscr{D}_n \cup \mathscr{D}_0)(s, t))$$

$$\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sigma_f(\mathcal{D}_n(s, t)). \quad (1.9)$$

但是, 由  $f(s, t)$  满足(1)可知

$$\sigma_f((\mathcal{D}_n \cup \mathcal{D}_0)(s, t)) \geq \sigma_f(\mathcal{D}_0(s, t)), \quad (n \geq 1), \quad (1.10)$$

由(1.9)、(1.10)得  $\sigma_f(\mathcal{D}_0(s, t)) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sigma_f(\mathcal{D}_n(s, t))$ , 这与(1.8)矛盾. 所以  $\lim_{I(\mathcal{D}) \rightarrow 0} \sigma_f(\mathcal{D}(s, t)) = I_f(s, t)$  存在且等于  $V_f(s, t)$ .

(3) 由(1)立得(3).

**引理1.5.** 设  $P(s, t)$  是一个非时齐的准转概率阵, 任取  $i \in E$ ,  $A \subset E$ ,  $i \notin A$ , 若

$$\lim_{\substack{(t-s) \rightarrow 0+ \\ 0 \leq s < t \leq b}} \sup_{j \in A} [1 - p_{i,j}(s, t)] = 0, \quad (b > 0), \quad (1.11)$$

则对任何给定的  $0 < \varepsilon < \frac{1}{16}$ ,  $b > 0$ , 存在  $\tau_0 = \tau_0(\varepsilon, i, A, b) > 0$ ,

使得  $0 \leq t - s < \tau_0$ ,  $0 \leq s < t \leq b$  时, 对  $[s, t]$  的任何分割  $\mathcal{D}(s, t) = \{r_0, r_1, \dots, r_n\}$  有

$$p_{i,A}(s, t) \geq (1 - 8\varepsilon) \sum_{j=1}^n p_{i,A}(r_{j-1}, r_j). \quad (1.12)$$

**证** 固定  $i, A, b$ . 任给  $0 < \varepsilon < \frac{1}{16}$ , 由(1.11)得知: 存在

$\tau_0 = \tau_0(\varepsilon)$  使

$$\sup_{\substack{0 \leq r - q \leq \tau_0, \\ 0 \leq r < q \leq b, \\ \{r, q\} \in A}} (1 - p_{i,j}(q, r)) < \varepsilon. \quad (1.13)$$

令  $G_{i,B}^{(0)} = \delta_{i,B}$ ,  
 $G_{i,B}^{(1)} = p_{i,B}(r_0, r_1),$

$$G_{i,B}^{(m+1)} = \sum_{k \in A} G_{i,k}^{(m)} p_{k,B}(r_m, r_{m+1}),$$

其中  $\delta_{i,B} = \sum_{k \in B} \delta_{i,k}$ ,  $G_{i,k}^{(m)} = G_{i,\{k\}}^{(m)}$ ,  $j \in E, B \subset E, 1 \leq m < n$ . ( $G_{i,B}^{(m)}$  的

概率意义是: 系统在时刻  $r_0 = s$  处于状态  $i$ , 在时刻  $r_1, \dots, r_{m-1}$  不

进入A而在时刻  $r_m$  进入B的概率.) 对  $m$  作归纳法可证,

$$p_{i,B}(s, t) = \sum_{l=1}^n \sum_{j \in A} G_{i,j}^{(l)} p_{j,B}(r_l, t) \\ + \sum_{j \in A} G_{i,j}^{(m)} p_{j,B}(r_m, t), \quad (1 \leq m \leq n, B \subset E), \quad (1.14)$$

事实上,  $m=1$  时, (1.14) 显然成立. 设 (1.14) 对  $m-1$  成立, 则由  $G_{i,j}^{(l)}$  的定义及 (K-C) 方程式和富比尼定理有

$$p_{i,B}(s, t) = \sum_{l=1}^{m-1} \sum_{j \in A} G_{i,j}^{(l)} p_{j,B}(r_l, t) \\ + \sum_{j \in A} G_{i,j}^{(m-1)} p_{j,B}(r_{m-1}, t) \\ = \sum_{l=1}^n \sum_{j \in A} G_{i,j}^{(l)} p_{j,B}(r_l, t) + \sum_{j \in A} G_{i,j}^{(m)} p_{j,B}(r_m, t) \\ + \sum_{j \in A} G_{i,j}^{(m-1)} p_{j,B}(r_{m-1}, t) - \sum_{j \in E} G_{i,j}^{(m)} p_{j,B}(r_m, t) \\ = \sum_{l=1}^n \sum_{j \in A} G_{i,j}^{(l)} p_{j,B}(r_l, t) + \sum_{j \in A} G_{i,j}^{(m)} p_{j,B}(r_m, t).$$

在 (1.14) 中取  $m=n$ ,  $B=A$ , 并注意  $i \in A$ ,  $0 \leq t-s \leq \tau_0$ ,  $0 \leq s < t \leq b$  及 (1.13) 可得

$$\varepsilon > p_{i,A}(s, t) \geq \sum_{l=1}^n \sum_{j \in A} G_{i,j}^{(l)} p_{j,A}(r_l, t) \\ \geq \sum_{l=1}^n \sum_{j \in A} G_{i,j}^{(l)} (1 - \varepsilon).$$

所以

$$\sum_{l=1}^n G_{i,j}^{(l)} \leq \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}. \quad (1.15)$$

在 (1.14) 中取  $B = \{i\}$  即得

$$p_{i,i}(s, t) \leq \sum_{l=1}^m G_{i,i}^{(l)} + G_{i,i}^{(m)} + \sum_{j \in A \cup \{i\}} G_{i,j}^{(m)} p_{j,i}(r_m, t). \quad (1.16)$$

对 $m$ 作归纳法易证:

$$G_{i,i}^{(m)} \leq p_{i,i}(r_0, r_m). \quad (1.17)$$

由(1.13)和(1.17)得

$$\sum_{j \in A \cup \{i\}} G_{i,j}^{(m)} p_{j,i}(r_m, t) \leq \varepsilon. \quad (1.18)$$

以(1.15)、(1.18)代入(1.16)并注意(1.13)得

$$G_{i,i}^{(m)} \geq (1 - \varepsilon) - \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} - \varepsilon > \frac{1 - 8\varepsilon}{1 - \varepsilon}, \quad (0 \leq m \leq n). \quad (1.19)$$

由 $G_{i,i}^{(m)}$ 的定义有

$$G_{i,i}^{(l)} \geq G_{i,i}^{(l-1)} p_{i,i}(r_{l-1}, r_l), \quad (l=1, \dots, n). \quad (1.20)$$

在(1.14)中取 $B=A$ ,  $m=n$ , 并注意(1.13)、(1.19)(1.20)得

$$\begin{aligned} p_{i,i}(s, t) &\geq \sum_{l=1}^n G_{i,i}^{(l-1)} \sum_{j \in A} p_{i,j}(r_{l-1}, r_l) p_{j,i}(r_l, t) \\ &\geq \frac{1 - 8\varepsilon}{1 - \varepsilon} (1 - \varepsilon) \sum_{l=1}^n \sum_{j \in A} p_{i,j}(r_{l-1}, r_l) \\ &= (1 - 8\varepsilon) \sum_{l=1}^n p_{i,i}(r_{l-1}, r_l). \end{aligned}$$

**引理1.6.** 若非时齐的准转概阵 $P(s, t)$ 满足

$$\lim_{\substack{\{t-s\} \rightarrow 0+ \\ 0 \leq s < t \leq b}} \sup_{j \in E} (1 - p_{i,j}(s, t)) = 0, \quad (b > 0), \quad (1.21)$$

任取 $i \in E$ ,  $A \subset E$ ,  $i \in A$ ,  $b > 0$ , 则对任何 $0 < \varepsilon < \frac{1}{16}$ , 存在 $\tau_i =$

$\tau_i(\varepsilon, i, A, b) > 0$ , 使得: 只要 $0 \leq t - s \leq \tau_i$ ,  $0 \leq s < t \leq b$ , 那么对 $[s, t]$ 的任一分割 $\mathscr{D}(s, t) = \{r_0, r_1, \dots, r_n\}$ , 都有

$$\begin{aligned}
p_{i,A}(s, t) &\leq \sum_{l=1}^n p_{i,A}(r_{l-1}, r_l) \\
&+ 8\varepsilon \sum_{l=1}^n p_{i,E-(A \cup \{i\})}(r_{l-1}, r_l). \quad (1.22)
\end{aligned}$$

**证** 由引理1.5知: 存在  $\tau_0 = \tau_0(\varepsilon, i, A, b) > 0$ , 只要  $0 \leq t - s \leq \tau_0$ ,  $0 \leq s < t \leq b$ , 有

$$p_{i,E-(A \cup \{i\})}(s, t) \geq (1 - 8\varepsilon) \sum_{l=1}^n p_{i,E-(A \cup \{i\})}(r_{l-1}, r_l). \quad (1.23)$$

注意: 对任何非时齐的准转概阵  $P(s, t)$ , (1.14) 是恒等式. 在 (1.14) 中取  $B = A = E - \{i\}$ ,  $m = n$ , 即得

$$\begin{aligned}
p_{i,E-\{i\}}(s, t) &= \sum_{l=1}^n \sum_{j \in E-\{i\}} G_{i,j}^{(1)} p_{j,E-\{i\}}(r_l, t) \\
&\leq \sum_{l=1}^n G_{i,E-\{i\}}^{(1)} \\
&= \sum_{l=1}^n G_{i,E-\{i\}}^{(1,1)} p_{i,E-\{i\}}(r_{l-1}, r_l) \\
&\leq \sum_{l=1}^n p_{i,E-\{i\}}(r_{l-1}, r_l). \quad (1.24)
\end{aligned}$$

(1.24) 减去 (1.23) 即得 (1.22).

**引理1.7.** 设  $0 \leq p(s, t) \leq 1$ ,  $(0 \leq s \leq t < \infty)$ , 且  $\lim_{\substack{(t-s) \rightarrow 0+ \\ 0 \leq s < t \leq b}} p(s, t)$

$= 1$ ,  $(b > 0)$ , 令  $f(s, t) = -\log p(s, t)$ , 任取  $u$  固定, 则

$$\lim_{\substack{\{s, t\} \ni u \\ (t-s) \rightarrow 0+}} f(s, t) / (t-s) \text{ 与 } \lim_{\substack{\{s, t\} \ni u \\ (t-s) \rightarrow 0+}} (1 - p(s, t)) / (t-s) \text{ 或者}$$

都不存在, 或者同时存在且相等. ( $\log 0$  定义为  $-\infty$ ).

**证** 直接验证即知.

定理1.3. 设非时齐转概阵  $P(s, t)$  满足 (1.3)\*, 固定任意  $i \in E$ , 令  $f(s, t) = -\log p_{i,i}(s, t)$ , 则

$$(1) \quad T(1-P) = T(f) = T(I_f) = T(V_f), \quad (1.25)$$

其中

$$T(1-P) = \left\{ u \mid u \geq 0, \lim_{\substack{[s,t] \ni u \\ (t-s) \rightarrow 0+}} \frac{1-p_{i,i}(s, t)}{t-s} \text{ 存在} \right\},$$

$$T(f) = \left\{ u \mid u \geq 0, \lim_{\substack{[s,t] \ni u \\ (t-s) \rightarrow 0+}} \frac{f(s, t)}{t-s} \text{ 存在} \right\},$$

而  $T(I_f)$ ,  $T(V_f)$  的定义类似,  $I_f$ 、 $V_f$  的定义见定义1.3. 此外, 当  $u \in T(f)$  时有

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{[s,t] \ni u \\ (t-s) \rightarrow 0+}} \frac{1-p_{i,i}(s, t)}{(t-s)} &= \lim_{\substack{[s,t] \ni u \\ (t-s) \rightarrow 0+}} \frac{f(s, t)}{(t-s)} \\ &= \lim_{\substack{[s,t] \ni u \\ (t-s) \rightarrow 0+}} \frac{V_f(s, t)}{(t-s)} \\ &= \lim_{\substack{[s,t] \ni u \\ (t-s) \rightarrow 0+}} \frac{I_f(s, t)}{(t-s)}. \end{aligned} \quad (1.26)$$

(2) 存在勒贝格零测集  $N(i)$ , 使  $u \notin N(i)$  时有

$$\lim_{\substack{[s,t] \ni u \\ (t-s) \rightarrow 0+}} I_f(s, t) / (t-s) \text{ 存在且有限.}$$

(3) 当  $u \in N(i)$  时, 有

$$\lim_{\substack{[s,t] \ni u \\ (t-s) \rightarrow 0+}} (1-p_{i,i}(s, t)) / (t-s) = q_i(u) \quad (1.27)$$

存在且有限. 更有

$$\lim_{t \downarrow u} \frac{1-p_{i,i}(u, t)}{t-u} = q_i(u), \quad (u \notin N(i)), \quad (1.28)$$

$$\lim_{s \uparrow u} \frac{1-p_{i,i}(s, u)}{u-s} = q_i(u), \quad (u \in N(i), u > 0). \quad (1.29)$$

证 由引理1.4知  $I_f(s, t) = V_f(s, t)$  存在, 且

$$f(s, t) \leq I_f(s, t) = V_f(s, t), \quad (0 \leq s \leq t < \infty). \quad (1.30)$$



由  $P(s, t)$  满足 (1.3)\* 及引理 1.5 知, 对任何  $0 < \varepsilon < \frac{1}{16}$  存在  $\tau_0 = \tau_0(\varepsilon, i, b) > 0$ , 使得  $0 \leq t - s \leq \tau_0$ ,  $0 \leq s < t \leq b$  时有

$$p_{i, E-(i)}(s, t) \geq (1 - 8\varepsilon) \sum_{l=1}^n p_{i, E-(i)}(r_{l-1}, r_l). \quad (1.31)$$

再用  $P(s, t)1 \equiv 1$  可知

$$p_{i, i}(s, t) \leq 1 - (1 - 8\varepsilon) \sum_{l=1}^n (1 - p_{i, i}(r_{l-1}, r_l)). \quad (1.32)$$

用引理 1.1 (取  $\beta = (1 - 8\varepsilon)$ ,  $\alpha_l = p_{i, i}(r_{l-1}, r_l)$ ) 由 (1.32) 得

$$p_{i, i}(s, t) \leq 8\varepsilon + (1 - 8\varepsilon) \prod_{l=1}^n p_{i, i}(r_{l-1}, r_l). \quad (1.33)$$

若令

$$f_i(s, t) = -\log[(p_{i, i}(s, t) - 8\varepsilon)/(1 - 8\varepsilon)],$$

由 (1.33) 有

$$f_i(s, t) \geq \sum_{l=1}^n f_i(r_{l-1}, r_l), \quad (1.34)$$

从而由  $I_f(s, t) = V_f(s, t)$  的存在性及  $\{r_0, r_1, \dots, r_n\}$  是  $[s, t]$  的一个分割得知

$$f_i(s, t) \geq I_f(s, t), \quad (0 \leq t - s \leq \tau_0, 0 \leq s < t \leq b). \quad (1.35)$$

由 (1.30)、(1.35) 得

$$\begin{aligned} f(s, t) &\leq I_f(s, t) = V_f(s, t) \leq f_i(s, t), \\ (0 \leq t - s \leq \tau_0, 0 \leq s < t \leq b) \end{aligned} \quad (1.36)$$

所以, 任取  $u \in T(I_f)$ ,  $0 \leq u < b$ , 有

$$\begin{aligned} \limsup_{\substack{[s, t] \ni u \\ (t-s) \rightarrow 0+}} \left[ f(s, t) / (t-s) \right] &\leq \limsup_{\substack{[s, t] \ni u \\ (t-s) \rightarrow 0+}} \left[ I_f(s, t) / (t-s) \right] \\ &= \liminf_{\substack{[s, t] \ni u \\ (t-s) \rightarrow 0+}} \left[ I_f(s, t) / (t-s) \right] \leq \liminf_{\substack{[s, t] \ni u \\ (t-s) \rightarrow 0+}} \left[ f_i(s, t) / (t-s) \right]. \end{aligned} \quad (1.37)$$

但是，由引理1.2有

$$\begin{aligned} \liminf_{\substack{[s,t] \ni u \\ (t-s) \rightarrow 0+}} \frac{f_1(s,t)}{(t-s)} &= \liminf_{\substack{[s,t] \ni u \\ (t-s) \rightarrow 0+}} \frac{-1}{(t-s)} \log \frac{p_{i,i}(s,t) - 8\varepsilon}{1 - 8\varepsilon} \\ &\leq \liminf_{\substack{[s,t] \ni u \\ (t-s) \rightarrow 0+}} \frac{(1+18\varepsilon)}{(t-s)} (-\log p_{i,i}(s,t)) \\ &= \liminf_{\substack{[s,t] \ni u \\ (t-s) \rightarrow 0+}} (1+18\varepsilon) \frac{f(s,t)}{(t-s)}. \quad (1.38) \end{aligned}$$

由(1.37)、(1.38)和 $\varepsilon > 0$ 可任意小得知 $u \in T(f)$ ,

(即是  $[0, b) \cap T(I_f) \subset T(f)$ ) 且

$$\begin{aligned} &\lim_{\substack{[s,t] \ni u \\ (t-s) \rightarrow 0+}} \frac{f(s,t)}{(t-s)} \\ &= \lim_{\substack{[s,t] \ni u \\ (t-s) \rightarrow 0+}} I_f(s,t) / (t-s). \quad (u \in T(I_f) \cap (0, b)) \quad (1.39) \end{aligned}$$

但是 $b > 0$ 可以任意，所以 $T(I_f) \subset T(f)$ 且(1.39)对一切 $u \in T(I_f)$ 成立。仿之可证 $T(f) \subset T(I_f)$ 。总之， $T(f) = T(I_f) = T(V_f)$ ，且 $u \in T(f)$ 时(1.26)后面二等式成立。再用引理1.7即得(1.25)、(1.26)。(1)证毕。

(2) 由(1.36)知 $I_f(s,t)$ 在 $0 \leq t-s \leq \tau_0$ ,  $0 \leq s \leq t < b$ 上有限，由引理1.3知：任意固定 $a$ ,  $\psi(v) = I_f(a, v)$  ( $a \leq v \leq a + \tau_0$ ,  $v < b$ )是单调非降实值函数，故对 $(a, (a + \tau_0) \wedge b)$ 中几乎所有的 $u$ ，有

$$\lim_{\substack{[s,t] \ni u \\ (t-s) \rightarrow 0+}} \frac{I_f(s,t)}{(t-s)} = \lim_{\substack{[s,t] \ni u \\ (t-s) \rightarrow 0+}} \frac{\psi(t) - \psi(s)}{(t-s)}$$

存在且非负有限。由于 $a$ 和 $b$ 可以任意， $\tau_0 > 0$ ，故对 $[0, \infty)$ 中几乎所有的 $u$ ，

$$\lim_{\substack{[s,t] \ni u \\ (t-s) \rightarrow 0+}} \frac{I_f(s,t)}{(t-s)}$$

存在且非负有限。

(3) 由(1)、(2)得(1.27)。由(1.27)得(1.28)、(1.29)。定理证毕。

定理1.4. 设非时齐转概阵 $P(s, t)$ 满足(1.3)\*, 固定任意  $i \in E$ ,  $A \subset E$ ,  $i \notin A$ , 令

$$g(s, t) = p_{i, A}(s, t), \quad h(s, t) = p_{i, E - \{i\}}(s, t), \quad (1.40)$$

则

(1)  $I_g(a, b)$ ,  $I_h(a, b)$ 存在且有限,  $(0 \leq a \leq b < \infty)$ ;

(2)  $\overline{N(i)} \cap T(g) = \overline{N(i)} \cap T(I_g)$ , 且  $u \in \overline{N(i)} \cap T(g)$ 时,

$$\lim_{\substack{[s, t] \ni u \\ (t-s) \rightarrow 0+}} g(s, t) / (t-s) = \lim_{\substack{[s, t] \ni u \\ (t-s) \rightarrow 0+}} I_g(s, t) / (t-s);$$

(其中  $N(i)$ 、 $T(g)$ 、 $T(I_g)$ 见定理1.3,  $\overline{N(i)} = [0, \infty) - N(i)$ ).

(3) 存在勒贝格零测集 $N(i, A)$ , 当  $u \in N(i, A)$ 时,

$$\lim_{\substack{[s, t] \ni u \\ (t-s) \rightarrow 0+}} I_g(s, t) / (t-s) = q_{i, A}(u)$$

存在且非负有限;

(4) 当  $u \in N(i, A)$ 时, 有

$$\lim_{\substack{[s, t] \ni u \\ (t-s) \rightarrow 0+}} p_{i, A}(s, t) / (t-s) = q_{i, A}(u), \quad (1.41)$$

更有,

$$\lim_{t \downarrow u} p_{i, A}(u, t) / (t-u) = q_{i, A}(u), \quad (u \in N(i, A)), \quad (1.42)$$

$$\lim_{s \uparrow u} p_{i, A}(s, u) / (u-s) = q_{i, A}(u), \quad \left( \begin{array}{l} u > 0, \\ u \in N(i, A) \end{array} \right). \quad (1.43)$$

证 (1) 令  $g_B(s, t) = p_{i, B}(s, t)$ ,  $(B \subset E, i \notin B)$ .

任给  $0 < \varepsilon < \frac{1}{16}$ , 由引理1.5得知: 存在  $\tau_0 = \tau_0(\varepsilon, i, B, b) > 0$ , 对  $[a, b]$ 的任一分割  $\mathscr{D}(a, b) = \{s_0, s_1, \dots, s_n\}$ , 只要  $l(\mathscr{D}) < \tau_0$ , 那么对  $[a, b]$ 的其它任意分割  $\tilde{\mathscr{D}}(a, b) = \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$ , 都有

$$\sigma_{g_B}(\mathscr{D}(a, b)) \geq (1 - 8\varepsilon) \sigma_{g_B}((\mathscr{D} \cup \tilde{\mathscr{D}})(a, b)). \quad (1.44)$$

若令  $l(j) = \min\{i | t_i \geq s_j\}$ , ( $j = 1, \dots, n-1$ ), 则有

$$\begin{aligned} \sigma_{g_B}((\mathcal{D} \cup \tilde{\mathcal{D}})(a, b)) &= \sigma_{g_B}(\tilde{\mathcal{D}}(a, b)) \\ &+ \sum_{j=1}^{n-1} [g_B(t_{l(j)-1}, s_j) + g_B(s_j, t_{l(j)}) - g_B(t_{l(j)-1}, t_{l(j)})]. \end{aligned}$$

注意:  $\max\{(t_{l(j)} - s_j), (s_j - t_{l(j)-1}), (t_{l(j)} - t_{l(j)-1})\} \leq l(\tilde{\mathcal{D}})$ , 所以, 在(1.44)中令  $l(\tilde{\mathcal{D}}) \rightarrow 0$  由  $\lim_{(t-s) \rightarrow 0+} g_B(s, t) = 0$  得

$$\infty > \sigma_{g_B}(\mathcal{D}(a, b)) \geq (1 - 8\varepsilon) \limsup_{l(\tilde{\mathcal{D}}) \rightarrow 0} \sigma_{g_B}(\tilde{\mathcal{D}}(a, b)).$$

此, 在上式中令  $l(\mathcal{D}) \rightarrow 0$  取下极限并注意  $\varepsilon > 0$  可任意小即可知  $I_{g_B}(a, b)$  存在且有限. (1) 证毕.

(2) 由引理1.5及1.6知: 对任何  $0 < \varepsilon < \frac{1}{16}$ , 存在  $\tau_0 = \tau_0(\varepsilon, i, A, b) > 0$ , 使  $0 \leq t - s \leq \tau_0$ ,  $0 \leq s \leq t < b$  时有

$$\begin{cases} (1 - 8\varepsilon)I_h(s, t) \leq h(s, t), \\ (1 - 8\varepsilon)I_g(s, t) \leq g(s, t) \leq I_g(s, t) + 8\varepsilon I_h(s, t). \end{cases} \quad (1.45)$$

所以, 若取  $u \in \overline{N(i)} \cap T(I_g) \cap [0, b)$ , 则由

$$\begin{aligned} & (1 - 8\varepsilon) \liminf_{\substack{[s, t] \ni u \\ (t-s) \rightarrow 0+}} I_g(s, t) / (t - s) \\ & \leq \liminf_{\substack{[s, t] \ni u \\ (t-s) \rightarrow 0+}} g(s, t) / (t - s) \\ & \leq \limsup_{\substack{[s, t] \ni u \\ (t-s) \rightarrow 0+}} g(s, t) / (t - s) \\ & \leq \limsup_{\substack{[s, t] \ni u \\ (t-s) \rightarrow 0+}} I_g(s, t) / (t - s) + \limsup_{\substack{[s, t] \ni u \\ (t-s) \rightarrow 0+}} \frac{8\varepsilon I_h(s, t)}{(t - s)} \\ & \leq \limsup_{\substack{[s, t] \ni u \\ (t-s) \rightarrow 0+}} \frac{I_g(s, t)}{(t - s)} + \limsup_{\substack{[s, t] \ni u \\ (t-s) \rightarrow 0+}} \frac{8\varepsilon}{1 - 8\varepsilon} \cdot \frac{1 - p_{i,i}(s, t)}{(t - s)}, \end{aligned}$$

及

$$\lim_{\substack{[s,t] \ni u \\ (t-s) \rightarrow 0+}} \frac{1 - p_{i,i}(s,t)}{t-s} = q_i(u)$$

是有限数和

$$\lim_{\substack{[s,t] \ni u \\ (t-s) \rightarrow 0+}} \frac{I_g(s,t)}{(t-s)} = q_{i,A}(u)$$

存在, 并注意  $\varepsilon > 0$  可以任意小即得

$$\lim_{\substack{[s,t] \ni u \\ (t-s) \rightarrow 0+}} g(s,t) / (t-s) = \lim_{\substack{[s,t] \ni u \\ (t-s) \rightarrow \infty+}} I_g(s,t) / (t-s)$$

$= q_{i,A}(u)$  存在. 由  $b > 0$  可任意大知此式对  $u \in \bar{N}(i) \cap T(I_g)$  成立. 仿之, 任取  $u \in \bar{N}(i) \cap T(g)$ , 也可证

$$\lim_{\substack{[s,t] \ni u \\ (t-s) \rightarrow 0+}} I_g(s,t) / (t-s)$$

存在且等于

$$\lim_{\substack{[s,t] \ni u \\ (t-s) \rightarrow 0+}} g(s,t) / (t-s).$$

至此, (2) 证毕.

(3) 由  $I_g(s,t)$  存在且有限, ( $0 \leq s \leq t < \infty$ ), 仿定理 1.3(2) 可得本定理的(3).

(4) 由(3)立得(4). 定理 1.4 证毕.

**定理 1.5.** 设非时齐的准转概阵  $P(s, t)$  满足 (1.3)\*, 则对任何  $i \in E$ ,  $A \subset E$ , 存在一个勒贝格零测集  $N(i, A)$ . 使  $u \in N(i, A)$  时有

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{[s,t] \ni u \\ (t-s) \rightarrow 0+}} \frac{p_{i,A}(s,t) - \delta_{i,A}}{(t-s)} \\ &= -\delta_{i,A} q_i(u) + q_{i,A-(i)}(u), \end{aligned} \quad (1.46)$$

更有

$$\lim_{t \downarrow u} \frac{p_{i,A}(u,t) - \delta_{i,A}}{(t-u)}$$

$$= -\delta_{i,A}q_i(u) + q_{i,A-(i)}(u), \quad (u \in N(i, A)), \quad (1.47)$$

$$\lim_{t \rightarrow u} \frac{p_{i,A}(s, u) - \delta_{i,A}}{(u - s)} \\ = -\delta_{i,A}q_i(u) + q_{i,A-(i)}(u), \quad \begin{pmatrix} u > 0, \\ u \in N(i, A) \end{pmatrix}, \quad (1.48)$$

其中 $q_i(u)$ 、 $q_{i,A}(u)$ 是 $u$ 的非负实值函数。

证 若 $P(s, t)$ 是转概阵, 则由定理1.3、1.4立得(1.46)、(1.47)、(1.48)成立。若 $P(s, t)$ 是准转概阵, 任取 $i^* \in E$ , 令

$$p_{i,j}^*(s, t) = \begin{cases} p_{i,j}(s, t), & i, j \in E \\ 1 - \sum_{k \in E} p_{i,k}(s, t), & i \in E, j = i^* \\ \delta_{i^*,j}, & i = i^* \end{cases}$$

则 $P^*(s, t) = (p_{i,j}^*, i, j \in E \cup \{i^*\})$ 是满足(1.3)\*的非时齐的转概阵, 所以对 $P^*(s, t)$ 而言, (1.46)、(1.47)、(1.48)成立, 从而对 $P(s, t)$ 而言(1.46)、(1.47)、(1.48)成立。

**定理1.6.** 若非时齐的准转概阵 $P(s, t)$ 满足(1.3)\*, 且对任何 $i \in E, A \subset E$ , 存在 $r_0 = r_0(i, A) > 0$ , 使

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} (p_{i,A}(s + \rho, t + \rho) - \delta_{i,A}) / (p_{i,A}(s, t) - \delta_{i,A}) = 1^{1)} \quad (1.49)$$

(对 $0 \leq t - s \leq r_0$ 一致成立),

则对任何 $u \geq 0, i \in E, A \subset E$ , (1.46)、(1.47)、(1.48)成立, 而且 $q_i(u)$ 、 $q_{i,A}(u)$  ( $i \in A$ )满足:

- (i) 固定 $i \in E$ ,  $q_i(u)$ 是 $u$ 的连续函数;
- (ii) 固定 $i \in E, A \subset E, i \in A$ ,  $q_{i,A}(u)$ 是 $u$ 的连续函数;
- (iii) 固定 $i \in E, u \geq 0, i \in A$ ,  $q_{i,A}(u)$ 满足

$$q_{i,A}(u) = \sum_{n=1}^{\infty} q_{i,A_n}(u),$$

1) 此处 $\frac{0}{0}$ 定义为1.

其中  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$ ,  $A_n \cap A_m = \emptyset$  ( $m \neq n$ ),  $A_n \subset E$ .

证 注意: (1.49) 等价于

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{p_{i,A}(s, t) - \delta_{i,A}}{p_{i,A}(s + \rho, t + \rho) - \delta_{i,A}} = 1, \quad (\text{对 } 0 \leq t - s \leq r_0 \text{ 一致}). \quad (1.49)^*$$

任取  $i \in E$ ,  $A \subset E$  固定. 由 (1.49) 和 (1.49)\* 得知: 任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\rho_0 > 0$ , 当  $0 \leq \rho \leq \rho_0$ ,  $0 \leq t - s \leq r_0$  有

$$\begin{aligned} & |p_{i,A}(s, t) - p_{i,A}(s + \rho, t + \rho)| \\ & \leq \min\{\varepsilon |\delta_{i,A} - p_{i,A}(s, t)|, \quad \varepsilon |\delta_{i,A} - p_{i,A}(s + \rho, t + \rho)|\}. \end{aligned} \quad (1.50)$$

今任取  $u_0 \geq 0$ , 总有  $\rho^*$  使  $u_0 + \rho^* \in [u_0, u_0 + \rho] \cap \overline{N(i, A)}$ , ( $\overline{N(i, A)}$  之定义见定理 1.5) 从而由定理 1.5 得

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{[s, t] \ni u_0 \\ (t-s) \rightarrow 0+}} \frac{1}{t-s} (p_{i,A}(s + \rho^*, t + \rho^*) - \delta_{i,A}) \\ & = \lim_{\substack{[s + \rho^*, t + \rho^*] \ni (u_0 + \rho^*) \\ (t-s) \rightarrow 0+}} \frac{1}{(t + \rho^*) - (s + \rho^*)} \\ & \quad \cdot (p_{i,A}(s + \rho^*, t + \rho^*) - \delta_{i,A}) \\ & = q_{i, A - \{i\}}(u_0 + \rho^*) - q_i(u_0 + \rho^*) \delta_{i,A} \\ & \text{记作 } q_0^* \quad \text{存在且有限.} \end{aligned} \quad (1.51)$$

因此, 由 (1.50)、(1.51) 有

$$\begin{aligned} & \limsup_{\substack{[s, t] \ni u_0 \\ (t-s) \rightarrow 0+}} (p_{i,A}(s, t) - \delta_{i,A}) / (t-s) \\ & \leq \limsup_{\substack{[s, t] \ni u_0 \\ (t-s) \rightarrow 0+}} \left[ \frac{p_{i,A}(s + \rho^*, t + \rho^*) - \delta_{i,A}}{(t-s)} \right. \\ & \quad \left. + \frac{\varepsilon |\delta_{i,A} - p_{i,A}(s + \rho^*, t + \rho^*)|}{(t-s)} \right] \\ & = \liminf_{\substack{[s, t] \ni u_0 \\ (t-s) \rightarrow 0+}} \left[ \frac{p_{i,A}(s + \rho^*, t + \rho^*) - \delta_{i,A}}{(t-s)} + \varepsilon |q_0^*| \right] \end{aligned}$$

$$\leq \liminf_{\substack{[s,t] \ni u_0 \\ (t-s) \rightarrow 0+}} \left[ \frac{p_{i,A}(s,t) - \delta_{i,A}}{(t-s)} + \varepsilon |q_0^*| + \varepsilon |q_0^*| \right]. \quad (1.52)$$

由  $\varepsilon > 0$  可任意小, 而  $q_0^*$  是有限数,  $u_0 \geq 0$  可任意, 用 (1.52)、(1.51) 得知 (1.46)、(1.47)、(1.48) 成立.

下面证明  $q_i(u)$ 、 $q_{i,A}(u)$  满足 (i) — (iii).

(i) 由 (1.50) 有

$$\begin{aligned} & \limsup_{\rho \rightarrow 0} |q_i(u) - q_i(u + \rho)| \\ & \leq \limsup_{\rho \rightarrow 0} \left| \lim_{\substack{[s,t] \ni u \\ (t-s) \rightarrow 0+}} \frac{p_{i,i}(s + \rho, t + \rho) - p_{i,i}(s, t)}{t - s} \right| \\ & \leq \limsup_{\rho \rightarrow 0} \left| \lim_{\substack{[s,t] \ni u \\ (t-s) \rightarrow 0+}} \frac{\varepsilon(1 - p_{i,i}(s, t))}{t - s} \right| \\ & = \varepsilon q_i(u), \end{aligned}$$

而  $\varepsilon > 0$  可以任意小,  $q_i(u)$  是有限数, 所以  $q_i(u)$  是  $u$  的连续函数.

(ii) 仿 (i) 可证 (ii).

(iii) 参见 [69] P. 101 (19).

## § 2. 一致可微性及柯氏方程式

**定理 2.1.** 若非时齐准转概阵  $P(s, t)$  满足

$$\lim_{(t-s) \rightarrow 0+} \inf p_{i,A}(s, t) = \delta_{i,A}, \quad (2.1)$$

( $i \in E$ ,  $A \subset E$ ), 则

$$\begin{aligned} (1) & \lim_{\tau \rightarrow 0+} \sup_{t \geq \tau} \left( \frac{1 - p_{i,i}(t - \tau, t)}{\tau} \right) \\ & = \lim_{\tau \rightarrow 0+} \frac{1}{\tau} [1 - \inf_{t \geq \tau} p_{i,i}(t - \tau, t)] \\ & = \lim_{\tau \rightarrow 0+} \frac{1}{\tau} [1 - \inf_{t \geq 0} p_{i,i}(t, t + \tau)] \\ & = \lim_{\tau \rightarrow 0+} \frac{1}{\tau} \sup_{t \geq 0} [1 - p_{i,i}(t, t + \tau)] \end{aligned}$$



记作  $\bar{q}_i$

(2.2)

存在 (可能为  $+\infty$ ),

$$(2) \inf_{t \geq \tau} p_{i,i}(t - \tau, t) = \inf_{t \geq 0} p_{i,i}(t, t + \tau) \geq e^{-\bar{q}_i \tau}. \quad (2.3)$$

证 令  $f(\tau) = \sup_{t \geq \tau} (-\log p_{i,i}(t - \tau, t))$ , ( $\tau \geq 0$ ), 则  $f(\tau)$  是  $[0, \infty)$  上的非负广义实值函数 (添加了  $\infty$  的实数集称为广义实数集), 由 (K-C) 方程式及定理假设得知  $f(\tau)$  满足:

$$\begin{aligned} (i) \text{ 半可加性: } f(u+v) &\leq \sup_{t \geq u+v} (-\log p_{i,i}(t - u - v, t - u)) \\ &+ \sup_{t \geq u+v} (-\log p_{i,i}(t - u, t)) \leq \sup_{t \geq u+v} (-\log p_{i,i}(t - u - v, t - u)) \\ &+ \sup_{t \geq u} (-\log p_{i,i}(t - u, t)) = f(u) + f(v), \quad (u, v \geq 0), \end{aligned}$$

$$(ii) \text{ 连续性: } \lim_{v \rightarrow 0+} f(v) = -\log \lim_{v \rightarrow 0+} \inf_{t \geq v} p_{i,i}(t - v, t) = 0.$$

所以由第二篇引理3.1知:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0+} f(\tau)/\tau = \sup_{\tau > 0} \frac{f(\tau)}{\tau} = \bar{q}_i$$

存在 (可能为  $+\infty$ ). 因此

$$f(\tau) = \bar{q}_i \tau + o(\tau), \quad (\tau \rightarrow 0+), \quad (2.4)$$

$$f(\tau) \leq \bar{q}_i \tau, \quad (\tau \geq 0), \quad (2.5)$$

由(2.4)得  $\inf_{t \geq \tau} p_{i,i}(t - \tau, t) = e^{-f(\tau)} = e^{-\bar{q}_i \tau} + o(\tau)$ , ( $\tau \rightarrow 0+$ ),

所以(1)得证. 由(2.5)得(2).

**定理2.2.** 对任何非时齐的准转概阵  $p(s, t)$ , 任取  $i \in E$ ,  $A \subset E, i \notin A$ , 若

$$\lim_{\substack{(t-s) \rightarrow 0+ \\ 0 \leq s < t < b}} \sup_{i \in A} (1 - p_{i,i}(s, t)) = 0, \quad (b > 0)$$

则

$$\lim_{\tau \rightarrow 0+} \frac{\inf_{t \geq \tau} p_{i,A}(t - \tau, t)}{\tau}$$

$$= \lim_{\tau \rightarrow 0+} \frac{\inf_{t \geq 0} p_{i,A}(t, t+\tau)}{\tau} = \bar{q}_{i,A} \quad (2.6)$$

存在且有限。

证 任取  $u > 0, \tau > 0$ , 令  $n = \left[ \frac{\tau}{u} \right]$ , ( $[a]$  表不大于  $a$  的最大整数), 取  $[t-\tau, t]$  的分割  $\mathscr{D}(t-\tau, t) = \{r_0, r_1, \dots, r_{n+1}\}$ ,  $r_1 = t-\tau + ju$ , ( $j=0, 1, \dots, n$ ),  $r_{n+1} = t$ . 由引理 1.5 知: 对任何  $0 < \varepsilon < \frac{1}{16}$ , 任何  $b > 0$ , 存在  $\tau_0 = \tau_0(\varepsilon, i, A, b) > 0$ , 只要  $0 \leq r \leq \tau_0, 0 \leq \tau \leq t < b$ , 就有

$$p_{i,A}(t-\tau, t) \geq (1-8\varepsilon) \sum_{j=1}^n p_{i,A}(t-\tau + (j-1)u, t-\tau + ju),$$

更有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tau} \inf_{t \geq \tau} p_{i,A}(t-\tau, t) \\ & \geq \frac{(1-8\varepsilon)u}{\tau} \inf_{t \geq \tau} \sum_{j=1}^n \frac{p_{i,A}(t-\tau + (j-1)u, t-\tau + ju)}{u} \\ & \geq \frac{(1-8\varepsilon)u}{\tau} \sum_{j=1}^n \inf_{t \geq \tau - (j-1)u} \frac{p_{i,A}(t-\tau + (j-1)u, t-\tau + ju)}{u} \\ & = \frac{(1-8\varepsilon)u}{\tau} n \inf_{t \geq u} \frac{p_{i,A}(t-u, t)}{u}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

若注意  $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{nu}{\tau} = 1$ , 在 (2.7) 中先对  $u \rightarrow 0+$  取上极限, 次对  $\tau \rightarrow 0+$

取下极限并注意  $\varepsilon > 0$  可以任意小, 即可得 (2.6) 成立且  $\bar{q}_{i,A}$  有限。

**定理 2.3.** 对任何满足 (1.3)\* ((1.3)\* 的  $b$  此时为  $\infty$ ) 的非时齐的准转概阵  $P(s, t)$ , 且  $\inf_{t \geq 0} p_{i,A}(t, t+\tau)$  对  $A$  有有限可加性, 则

$$\begin{aligned}
& \lim_{\tau \rightarrow 0+} \frac{\inf_{t \geq \tau} p_{i,A}(t-\tau, t) - \delta_{i,A}}{\tau} \\
&= \lim_{\tau \rightarrow 0+} \frac{\inf_{t \geq 0} p_{i,A}(t, t+\tau) - \delta_{i,A}}{\tau} \\
&= -\delta_{i,A} \bar{q}_i + \bar{q}_{i,A-(i)}, \quad (i \in E, A \subseteq E), \quad (2.8)
\end{aligned}$$

此外,  $\bar{q}_{i,A-(i)}$  满足

$$\bar{q}_{i,A-(i)} = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{q}_{i,A_n-(i)}, \quad (2.9)$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A, \quad A_n \cap A_m = \emptyset \quad (m \neq n).$$

**证** 由定理2.1、2.2即得 本定理.

下面我们将要研究柯氏方程式.

**定义2.1.** 若非时齐的准转概阵  $P(s, t)$  满足

$$(1) \quad \lim_{t \rightarrow u+0} \frac{p_{i,j}(u, t) - \delta_{i,j}}{t - u} = \tilde{q}_{i,j}(u), \quad (2.10)$$

$(u \geq 0, i \in E, j \in E)$  存在且有限,

$$(2) \quad \lim_{t \rightarrow u-0} \frac{p_{i,j}(t, u) - \delta_{i,j}}{u - t} = \tilde{q}_{i,j}(u), \quad (2.11)$$

$(u > 0, i \in E, j \in E),$

$$(3) \quad 0 \leq \tilde{q}_{i,j}(u) < \infty \quad (u \geq 0, i, j \in E, i \neq j),$$

$$0 \leq -\tilde{q}_{i,i}(u) < \infty, \quad (u \geq 0, i \in E),$$

$\sum_{j \in E} \tilde{q}_{i,j}(u) \leq 0, \quad (u \geq 0, i \in E),$  则称  $P(s, t)$  是可微的,  $\tilde{Q}(u) =$

$(\tilde{q}_{i,j}(u), i, j \in E)$  称为  $P(s, t)$  的转移强度矩阵, 简称转强阵.

撇开非时齐的准转概阵  $P(s, t)$ , 任意一个满足条件(3)的  $\tilde{Q}(u) = (\tilde{q}_{i,j}(u), i, j \in E)$ , 我们都称之为  $E$  上的一个非时齐的转强阵. 若  $\tilde{q}_{i,j}(u)$  在  $u \geq 0$  上连续 ( $i, j \in E$ ), 则称  $\tilde{Q}(u)$  是连续的.

若非时齐的准转概阵  $P(s, t)$  满足

$$(1)' \lim_{t \rightarrow u+0} \frac{p_{i,A}(u, t) - \delta_{i,A}}{t - u} = \tilde{q}_{i,A}(u), \quad (2.10)'$$

( $u \geq 0, i \in E, A \subset E$ ) 存在且有限,

$$(2)' \lim_{t \rightarrow u-0} \frac{p_{i,A}(t, u) - \delta_{i,A}}{u - t} = \tilde{q}_{i,A}(u), \quad (2.11)'$$

( $u > 0, i \in E, A \subset E$ ),

(3)'  $0 \leq \tilde{q}_{i,A}(u) < \infty, (u \geq 0, i \in E, A \subset E, i \notin A), 0 \leq -\tilde{q}_{i,i}(u) < \infty, (u \geq 0, i \in E, \tilde{q}_{i,i}(u) = \tilde{q}_{i,(i)}(u)), \tilde{q}_{i,E}(u) \leq 0, (u \geq 0, i \in E), \tilde{q}_{i,A}(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{q}_{i,A_n}(u), (u \geq 0, i \in E, A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$

$A_n \cap A_m = \emptyset (m \neq n), A \subset E)$ , 则称  $P(s, t)$  是一致可微的,  $\tilde{q}_{i,A}(u)$  称为  $P(s, t)$  的转移强度函数, 简称转强函数. 撇开非时齐的准转概阵  $P(s, t)$ , 任意一个满足 (3)′ 的  $\tilde{q}_{i,A}(u) (u \geq 0, i \in E, A \subset E)$ , 我们都称之为  $E$  上的一个非时齐的转强函数. 若  $\tilde{q}_{i,A}(u)$  对任何  $i \in E, A \subset E$ , 都是  $u$  的连续函数, 则称此非时齐的转强函数是连续的.

由定理1.6得知: 满足(1.3)\*和(1.49)的非时齐的准转概阵  $P(s, t)$  是一致可微的, 其转移强度函数是连续的, 而且

$$\tilde{q}_{i,A}(u) = -\delta_{i,A} q_i(u) + q_{i,A-(i)}(u),$$

( $u \geq 0, i \in E, A \subset E$ ).

引理2.1. 设  $\{\mu_n, n \geq 1\}$  是可测空间  $(\mathcal{S}, \mathcal{B})$  上一串有限测

度,  $f_n, f$  是有界  $\mathcal{B}$  可测函数,  $|f_n| \leq M, |f| \leq M, (n \geq 1), \mu$  是  $\mathcal{B}$  上一个有限测度,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A) = \mu(A), (A \in \mathcal{B})$ , 则

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{X}} f(x) \mu_n(dx) = \int_{\mathcal{X}} f(x) \mu(dx),$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{X}} f_n(x) \mu_n(dx) = \int_{\mathcal{X}} f(x) \mu(dx).$$

**证** 由  $f$  有界可测得知存在简单函数 (即值域为有限个点的可测函数) 列  $\{g_m, m \geq 1\}$  一致收敛到  $f$ . 而

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathcal{X}} f(x) \mu_n(dx) - \int_{\mathcal{X}} f(x) \mu(dx) \right| \\ & \leq \left| \int_{\mathcal{X}} f(x) \mu_n(dx) - \int_{\mathcal{X}} g_m(x) \mu_n(dx) \right| \\ & \quad + \left| \int_{\mathcal{X}} g_m(x) \mu_n(dx) - \int_{\mathcal{X}} g_m(x) \mu(dx) \right| \\ & \quad + \left| \int_{\mathcal{X}} g_m(x) \mu(dx) - \int_{\mathcal{X}} f(x) \mu(dx) \right|. \end{aligned} \quad (2.12)$$

由  $\mu_n \rightarrow \mu, g_m$  是简单函数得知 (2.12) 右边第二项当  $n \rightarrow \infty$  时趋于 0. 由  $f, g_m$  一致有界,  $g_m \rightarrow f, \mu$  是有限测度并应用控制收敛定理, (2.12) 右边第三项当  $m \rightarrow \infty$  时趋于 0. 又因为  $\mu_n \rightarrow \mu, \mu_n, \mu$  是有限测度, 故存在  $K > 0$ , 使  $\mu_n(\mathcal{E}) \leq K, (一切 n \geq 1)$ , 因此,

$$\left| \int_{\mathcal{X}} f(x) \mu_n(dx) - \int_{\mathcal{X}} g_m(x) \mu_n(dx) \right| \leq K \sup_{x \in \mathcal{X}} |f(x) - g_m(x)|,$$

由  $\{g_m, m \geq 1\}$  一致收敛到  $f$  得知 (2.12) 右边第一项当  $m \rightarrow \infty$  时 (对  $n$  一致地) 趋于 0. 总之, 在 (2.12) 中先令  $n \rightarrow \infty$ , 次令  $m \rightarrow \infty$  即得 (1).

$$(2) \left| \int_{\mathcal{X}} f_n(x) \mu_n(dx) - \int_{\mathcal{X}} f(x) \mu(dx) \right|$$

$$\leq \left| \int_{\mathcal{F}} f_n(x) \mu_n(dx) - \int_{\mathcal{F}} f(x) \mu_n(dx) \right| + \left| \int_{\mathcal{F}} f(x) \mu_n(dx) - \int_{\mathcal{F}} f(x) \mu(dx) \right| \quad (2.13)$$

任给  $\varepsilon > 0$ , 由  $f_n \rightarrow f$ ,  $\mu(\mathcal{E}) < \infty$ , 及叶果洛夫定理得知存在  $A_0 \in \mathcal{A}$ ,  $\mu(A_0) < \varepsilon$ , 使

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A_0} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{而 } \left| \int_{\mathcal{F}} f_n(x) \mu_n(dx) - \int_{\mathcal{F}} f(x) \mu_n(dx) \right| &\leq \int_{\mathcal{F}} |f_n(x) - f(x)| \mu_n(dx) \\ &\leq 2M \mu_n(A_0) + \sup_{x \in A_0} |f_n(x) - f(x)| \mu_n(\mathcal{E} - A_0). \end{aligned}$$

令  $n \rightarrow \infty$  即得

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{\mathcal{F}} f_n(x) \mu_n(dx) - \int_{\mathcal{F}} f(x) \mu_n(dx) \right| \\ \leq 2M\varepsilon, \end{aligned} \quad (2.14)$$

由(1) 知(2.13) 右边第二项当  $n \rightarrow \infty$  时趋于0. 再注意(2.14) 中之  $\varepsilon$  可任意小即得(2).

**定理2.4.** 若非时齐的准转概阵  $P(s, t)$  是一致可微的, 则

$$\frac{\partial}{\partial s} p_{i,A}(s, t) = - \sum_{j \in E} \tilde{q}_{i,j}(s) p_{j,A}(s, t), \quad (2.15)$$

( $s \in [0, t]$ ,  $i \in E$ ,  $A \subset E$ ).

**证** 任取  $s \in [0, t)$ ,  $\Delta s > 0$ ,  $s + \Delta s \leq t$ , 我们有:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Delta s} (p_{i,A}(s + \Delta s, t) - p_{i,A}(s, t)) \\ &= \frac{1 - p_{i,i}(s, s + \Delta s)}{\Delta s} p_{i,A}(s + \Delta s, t) \\ &= \sum_{j \neq i} \frac{p_{i,j}(s, s + \Delta s)}{\Delta s} p_{j,A}(s + \Delta s, t), \end{aligned}$$

由一致可微性假设及引理2.1和定理1.2得:

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta s \rightarrow 0+} \frac{1}{\Delta s} (p_{i,A}(s + \Delta s, t) - p_{i,A}(s, t)) \\ &= - \sum_{j \in E} \tilde{q}_{i,j}(s) p_{j,A}(s, t). \end{aligned}$$

再取  $s \in (0, t]$ ,  $\Delta s > 0$ ,  $s - \Delta s \geq 0$ , 我们有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta s} (p_{i,A}(s, t) - p_{i,A}(s - \Delta s, t)) \\ &= \frac{1 - p_{i,i}(s - \Delta s, s)}{\Delta s} p_{i,A}(s, t) \\ &= \sum_{j \neq i} \frac{p_{i,j}(s - \Delta s, s)}{\Delta s} p_{j,A}(s, t), \end{aligned}$$

所以, 由一致可微性假设及引理2.1有

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta s \rightarrow 0+} \frac{1}{\Delta s} (p_{i,A}(s, t) - p_{i,A}(s - \Delta s, t)) \\ &= - \sum_{j \in E} \tilde{q}_{i,j}(s) p_{j,A}(s, t). \end{aligned}$$

**定理2.5.** 在定理1.6的条件下, (2.15) 成立, 而且

$$\frac{\partial}{\partial s} p_{i,A}(s, t)$$

在  $\mathcal{D}^* = \{(s, t) | 0 \leq s \leq t < \infty\}$  上是  $s, t$  的二元连续函数.

**证** 由定理2.4及定理1.6即得 (2.15) 成立, 且  $\tilde{q}_{i,A}(s)$  在  $s \geq 0$  上连续, 又因为由定理1.2得知  $p_{i,A}(s, t)$  对  $s$  来说在  $s \in [0, t]$  连续, 而且这种连续对  $t$  还是等度的, 所以, 由引理2.1得知 (2.15) 右端是  $s$  的连续函数, 而且这种连续对  $t$  来说是等度的. 而 (2.15) 右端对  $t$  来说在  $t \in [s, \infty)$  上连续由定理1.2 及控制收敛定理即可得. 总之, (2.15) 右端在  $\mathcal{D}^*$  上是  $s, t$  的二元连续函数.

**定理2.6.** 若一致可微的非时齐准转概阵  $P(s, t)$  满足 (1.3)\* 及

$$\sup_{i \in E} |\bar{q}_i| \leq C < \infty, \quad (\bar{q}_i \text{ 的定义见定理2.1}) \quad (S)$$

则

$$\frac{\partial}{\partial t} p_{i,A}(s, t) = \sum_{j \in E} p_{i,j}(s, t) \tilde{q}_{j,A}(t), \quad (2.16)$$

( $0 \leq s \leq t < \infty$ ,  $i \in E$ ,  $A \subset E$ ).

证 任取  $0 \leq s \leq t - \Delta t \leq t$ ,  $\Delta t > 0$ , 由定理2.1有

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} (1 - p_{i,j}(t - \Delta t, t)) &\leq \frac{1}{\Delta t} (1 - \inf_{t \geq \Delta t} p_{i,j}(t - \Delta t, t)) \\ &\leq \frac{1}{\Delta t} (1 - e^{-\bar{q}_{j,A} \Delta t}) \leq \bar{q}_{j,A} \leq C, \end{aligned} \quad (2.17)$$

( $j \in E$ ,  $\Delta t > 0$ ,  $t > 0$ ). 类似地

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} (1 - p_{i,j}(t, t + \Delta t)) &\leq C, \quad (j \in E, \Delta t > 0, \\ &t \geq 0). \end{aligned} \quad (2.18)$$

由(2.17)、(2.18)得

$$\sup_{\substack{t \geq 0 \\ j \in E}} |\tilde{q}_{j,A}(t)| \leq C,$$

从而

$$\sup_{\substack{t \geq 0; j \in E \\ A \subset E}} |\tilde{q}_{j,A}(t)| \leq C, \quad (2.19)$$

由(2.19)再利用引理2.1得

$$\begin{aligned} &\lim_{\Delta t \rightarrow 0+} \sum_{j \in E} p_{i,j}(s, t - \Delta t) \tilde{q}_{j,A}(t) \\ &= \sum_{j \in E} p_{i,j}(s, t) \tilde{q}_{j,A}(t). \end{aligned} \quad (2.20)$$

因此,

$$\begin{aligned} &\limsup_{\Delta t \rightarrow 0+} \left| \frac{p_{i,A}(s, t) - p_{i,A}(s, t - \Delta t)}{\Delta t} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j \in E} p_{i,j}(s, t) \tilde{q}_{j,A}(t) \right| \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \leq \limsup_{\Delta t \rightarrow 0+} \left| \frac{p_{i,A}(s, t) - p_{i,A}(s, t - \Delta t)}{\Delta t} \right. \\
& \quad \left. - \sum_{j \in E} p_{i,j}(s, t - \Delta t) \tilde{q}_{j,A}(t) \right| \\
& = \limsup_{\Delta t \rightarrow 0+} \left| \sum_{j \in A} p_{i,j}(s, t - \Delta t) \left( \frac{p_{j,A}(t - \Delta t, t) - 1}{\Delta t} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \tilde{q}_{j,A}(t) \right) \right. \\
& \quad \left. + \sum_{j \in E-A} p_{i,j}(s, t - \Delta t) \left( \frac{p_{j,A}(t - \Delta t, t)}{\Delta t} - \tilde{q}_{j,A}(t) \right) \right|.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

但是, 由(2.17)、(2.19) 有

$$\left| \frac{1}{\Delta t} (p_{j,A}(t - \Delta t, t) - 1) - \tilde{q}_{j,A}(t) \right| \leq 3C, \tag{2.22}$$

( $t > 0, \Delta t > 0, j \in A \subset E$ ),

$$\left| \frac{1}{\Delta t} p_{j,A}(t - \Delta t, t) - \tilde{q}_{j,A}(t) \right| \leq 2C, \tag{2.23}$$

( $t > 0, \Delta t > 0, j \in E, j \notin A \subset E$ ).

由 (2.22)、(2.23)、定理 1.2 及一致可微性假设并利用引理 2.1 有

$$\begin{aligned}
& \limsup_{\Delta t \rightarrow 0+} \left| \sum_{j \in A} p_{i,j}(s, t - \Delta t) \left( \frac{p_{j,A}(t - \Delta t, t) - 1}{\Delta t} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \tilde{q}_{j,A}(t) \right) \right| \\
& = \limsup_{\Delta t \rightarrow 0+} \left| \sum_{j \in A} p_{i,j}(s, t - \Delta t) \left( \frac{p_{j,A}(t - \Delta t, t)}{\Delta t} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \tilde{q}_{j,A}(t) \right) \right| = 0.
\end{aligned}$$

以此代入(2.21)得

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0+} \frac{p_{i,A}(s, t) - p_{i,A}(s, t - \Delta t)}{\Delta t}$$

$$= \sum_{j \in E} p_{i,j}(s, t) \tilde{q}_{j,A}(t),$$

( $0 \leq s < t < \infty$ ,  $i \in E$ ,  $A \subset E$ ).

仿之可证 (在用(2.17)的地方改用(2.18)):

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta t \rightarrow 0+} \frac{p_{i,A}(s, t + \Delta t) - p_{i,A}(s, t)}{\Delta t} \\ &= \sum_{j \in E} p_{i,j}(s, t) \tilde{q}_{j,A}(t), \end{aligned}$$

( $0 \leq s \leq t < \infty$ ,  $i \in E$ ,  $A \subset E$ ). 定理证毕.

**定理2.7.** 在定理1.6的条件下,若定理2.6的(S)成立,则(2.16)成立,而且  $\frac{\partial}{\partial t} p_{i,A}(s, t)$  在  $\mathscr{D}^* = \{(s, t) | 0 \leq s \leq t < \infty\}$  上是  $s, t$  的二元连续函数.

**证** 在定理1.6的条件下,  $p_{i,A}(s, t)$  在  $\mathscr{D}^*$  上是  $s, t$  的二元连续函数,  $\tilde{q}_{j,A}(t)$  在  $t \geq 0$  连续, 由条件(S)知 (2.19) 成立, 所以, 由引理2.1得

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{(s, t) \rightarrow (s_0, t_0) \\ (s, t), (s_0, t_0) \in \mathscr{D}^*, j \in E}} \sum [p_{i,j}(s, t) - p_{i,j}(s_0, t_0)] \tilde{q}_{j,A}(t) = 0, \\ & \lim_{\substack{(s, t) \rightarrow (s_0, t_0) \\ (s, t), (s_0, t_0) \in \mathscr{D}^*, j \in E}} \sum p_{i,j}(s_0, t_0) [\tilde{q}_{j,A}(t) - \tilde{q}_{j,A}(t_0)] = 0, \end{aligned}$$

总上二式知 (2.16) 右端在  $\mathscr{D}^*$  上是  $s, t$  的二元连续函数, 定理证毕.

### § 3. 非时齐的Q—过程的存在性

**定义3.1.** 设  $Q(t) = (q_{i,j}(t), i, j \in E)$  ( $t \geq 0$ ) 是一个连续的非时齐的转强阵,  $q_{i,i}(t) = -q_i(t)$ , (定义见定义2.1) 如果非时齐的准转概阵  $P(s, t)$  满足

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \sup_{i \in E} \left| \frac{1}{h} (p_{i,j}(s, s+h) - \delta_{ij}) - q_{i,j}(s) \right| = 0,$$

( $i, j \in E, 0 \leq b < \infty$ ), 则称  $P(s, t)$  是一个  $Q$ -过程. 若  $Q(t)1 \equiv 0$ , 则称  $Q(t)$  是保守的. 若  $Q$ -过程  $P(s, t)$  是转概率, 即是  $P(s, t)1 \equiv 1$ , 则称此  $Q$ -过程是不间断的或不断的.

容易证明: 对任何  $Q$ -过程  $P(s, t)$  来说, 恒有

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \sup_{i \in E} \left| \frac{1}{h} (p_{i,j}(s-h, s) - \delta_{ij}) - q_{i,j}(s) \right| = 0,$$

$$(i, j \in E, 0 < b < \infty).$$

事实上, 用  $q_{i,j}(u)$  的连续性可得:

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0+} \sup_{i \in E} \sup_{0 \leq s \leq b} \left| \frac{1}{h} (p_{i,j}(s-h, s) - \delta_{ij}) - q_{i,j}(s) \right| \\ & \leq \limsup_{h \rightarrow 0+} \sup_{0 \leq t \leq b-h} \left| \frac{1}{h} (p_{i,j}(t, t+h) - \delta_{ij}) - q_{i,j}(t) \right| \\ & + \limsup_{h \rightarrow 0+} \sup_{0 \leq t \leq b-h} |q_{i,j}(t) - q_{i,j}(t+h)| = 0. \end{aligned}$$

**定理3.1.** 对任何连续的非时齐的转强阵  $Q(t) = (q_{i,j}(t), i, j \in E)$ , 若  $Q(t)1$  对  $t \geq 0$  连续, 则存在一个  $Q$ -过程.

证 令

$$\Delta(s, t) = \text{diag}(\exp \int_s^{t+1} q_{i,i}(u) du, i \in E),$$

$$0 \leq s \leq t < \infty,$$

$$D_{q(t)} = \text{diag}(-q_{i,i}(t), i \in E), 0 \leq t < \infty,$$

$$S(t) = Q(t) + D_{q(t)}, 0 \leq t < \infty,$$

$$P_0(s, s+t) = \Delta(s, t), (0 \leq s, t < \infty),$$

$$P_{n+1}(s, s+t) = \int_0^t \Delta(s, d) S(s+d) P_n(s+d, s+t) da,$$

$$(n \geq 0, 0 \leq s, t < \infty),$$

$$\bar{P}(s, s+t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(s, s+t), (0 \leq s, t < \infty),$$

注意，如前所约定，我们如不特别申明，对矩阵比较大小、取极限、连续、微商、积分等都是逐元意义下的。往证 $\bar{P}(s, s+t)$ 是一个 $Q$ -过程。

首先证明 $\bar{P}(s, s+t)$ 是一个非时齐的准转概阵。显然 $\bar{P}(s, s+t) \geq 0$ ，对 $n$ 作归纳法可以证明 $\sum_{i=1}^n P_i(s, s+t) \mathbf{1} \leq \mathbf{1}$ ，( $n \geq 0$ )，

从而 $\bar{P}(s, s+t) \mathbf{1} \leq \mathbf{1}$ 。事实上， $P_0(s, s+t) \mathbf{1} = \Delta(s, t) \mathbf{1} \leq \mathbf{1}$ ，

若 $\sum_{v=0}^k P_v(s, s+t) \mathbf{1} \leq \mathbf{1}$ ，则

$$\begin{aligned} & \sum_{v=0}^{k+1} P_v(s, s+t) \mathbf{1} = \Delta(s, t) \mathbf{1} \\ & + \int_0^t \Delta(s, \alpha) S(s+\alpha) \sum_{i=0}^k P_i(s+\alpha, s+t) \mathbf{1} d\alpha \\ & \leq \Delta(s, t) \mathbf{1} + \int_0^t \Delta(s, \alpha) S(s+\alpha) \mathbf{1} d\alpha, \end{aligned}$$

但是

$$S(s+\alpha) = Q(s+\alpha) + D_{Q(s+\alpha)}, \quad Q(s+\alpha) \mathbf{1} \leq 0,$$

所以

$$\begin{aligned} & \sum_{v=0}^{k+1} P_v(s, s+t) \mathbf{1} \leq \Delta(s, t) \mathbf{1} + \int_0^t \Delta(s, \alpha) D_{Q(s+\alpha)} \mathbf{1} d\alpha \\ & \leq [\text{diag}(e^{\int_s^{s+t} q_{i,i}(u) du} - \int_0^t q_{i,i}(s+\alpha) e^{\int_s^{s+\alpha} q_{i,i}(u) du} d\alpha, \\ & \quad i \in E)] \mathbf{1} \\ & = [\text{diag}(e^{\int_s^{s+t} q_{i,i}(u) du} + \{1 - e^{\int_s^{s+t} q_{i,i}(u) du}\}, i \in E)] \mathbf{1} \\ & = \mathbf{1}, \end{aligned}$$

这就证明了 $\bar{P}(s, s+t) \mathbf{1} \leq \mathbf{1}$ 。现在我们来证明，

$$\bar{P}(s, s+t+u) = \bar{P}(s, s+t) \bar{P}(s+t, s+t+u). \quad (3.1)$$

先证对任何  $n \geq 0$  有

$$P_n(s, s+t+u) = \sum_{v=0}^n P_v(s, s+t) P_{n-v}(s+t, s+t+u), \quad (3.2)$$

事实上,  $n=0$  时, 由  $P_0(s, t)$  的定义知 (3.2) 成立. 设 (3.2) 对  $n=k$  时成立, 则

$$\begin{aligned} P_{k+1}(s, s+t+u) &= \int_0^{t+u} \Delta(s, \alpha) S(s+\alpha) \\ &\quad \cdot P_k(s+\alpha, s+t+u) d\alpha \\ &= \int_0^t \Delta(s, \alpha) S(s+\alpha) \sum_{v=0}^k P_v(s+\alpha, s+t) \\ &\quad \cdot P_{k-v}(s+t, s+t+u) d\alpha \\ &\quad + \int_t^{t+u} \Delta(s, \alpha) S(s+\alpha) P_k(s+\alpha, s+t+u) d\alpha \\ &= \sum_{v=0}^k P_{v+1}(s, s+t) P_{k-v}(s+t, s+t+u) \\ &\quad + \Delta(s, t) \int_0^u \Delta(s+t, \alpha) S(s+t+\alpha) \\ &\quad \cdot P_k(s+t+\alpha, s+t+u) d\alpha \\ &= \sum_{v=0}^{k+1} P_v(s, s+t) P_{k+1-v}(s+t, s+t+u) \end{aligned}$$

归纳法完成. 利用 (3.2) 及  $\bar{P}(s, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(s, t)$  可得 (3.1).

现在再证明

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \sup_{0 < s \leq b} \{ \bar{P}_{i,j}(s, s+h) - \delta_{i,j} \} = 0, \quad \left( \begin{matrix} i, j \in E, \\ 0 < b < \infty \end{matrix} \right),$$

其中  $\bar{P}(s, t) = (\bar{p}_{i,j}(s, t), i, j \in E)$ . 因为

$$\sum_{v=0}^n P_v(s, s+t) = \Delta(s, t)$$

$$+ \int_0^t \Delta(s, \alpha) S(s + \alpha) \sum_{v=0}^{n-1} P_v(s + \alpha, s + t) d\alpha,$$

令  $n \rightarrow \infty$  即得

$$\begin{aligned} \bar{P}(s, s + t) &= \Delta(s, t) + \int_0^t \Delta(s, \alpha) S(s + \alpha) \\ &\quad \cdot \bar{P}(s + \alpha, s + t) d\alpha \end{aligned} \quad (3.3)$$

但是  $q_{ij}(s)$  在  $s \geq 0$  连续,  $(i, j \in E)$ , 而且

$$\Delta(s, \alpha) S(s + \alpha) \bar{P}(s + \alpha, s + t) \leq (f_{i,j}(s, \alpha), i, j \in E),$$

其中  $f_{i,j} = f_{i,i}$ ,  $(i, j \in E)$ ,

$$f_{i,i}(s, \alpha) = -q_{i,i}(s + \alpha) e^{-\int_s^{s+\alpha} q_{i,i}(u) du}, \quad (i \in E).$$

所以, 若令

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}} \right\} i \text{ 个} \quad e'_i \text{ 是 } e_i \text{ 之转置,}$$

则有

$$\begin{aligned} & \limsup_{h \rightarrow 0+} \sup_{0 \leq s \leq b} |\bar{p}_{i,j}(s, s+h) - \delta_{i,j}| \\ & \leq \limsup_{h \rightarrow 0+} \sup_{0 \leq s \leq b} \{ |\delta_{i,j} e^{\int_s^{s+h} q_{i,i}(u) du} - \delta_{i,j}| \\ & \quad + e'_i \left( \int_0^h \Delta(s, \alpha) S(s + \alpha) \bar{P}(s + \alpha, s + h) d\alpha \right) e_j \} \\ & \leq \limsup_{h \rightarrow 0+} \sup_{0 \leq s \leq b} \{ |\delta_{i,j} e^{\int_s^{s+h} q_{i,i}(u) du} - \delta_{i,j}| \\ & \quad - \int_0^h q_{i,i}(s + \alpha) e^{\int_s^{s+\alpha} q_{i,i}(u) du} d\alpha \} = 0. \end{aligned}$$

这就证明了

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \sup_{0 \leq s \leq b} |\bar{p}_{i,j}(s, s+h) - \delta_{i,j}| = 0, \quad \left( \begin{matrix} i, j \in E, \\ 0 \leq b < \infty \end{matrix} \right)$$

而  $\bar{P}(t, t) = I$  ( $I$  是单位矩阵) 由 (3.3) 立得. 综上所述, 我们证明了  $\bar{P}(s, t)$  是一个非时齐的准转移阵.

其次, 我们证明:

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \sup_{0 \leq s \leq b} \left| \frac{\bar{p}_{i,j}(s, s+h) - \delta_{i,j}}{h} - q_{i,j}(s) \right| = 0.$$

由 (3.3) 得

$$\begin{aligned} & \frac{\bar{P}(s, s+h) - \bar{P}(s, s)}{h} \\ &= \frac{\Delta(s, h) - I}{h} \\ & \quad + \frac{1}{h} \int_0^s \Delta(s, \alpha) S(s+\alpha) \bar{P}(s+\alpha, s+h) d\alpha. \end{aligned} \quad (3.4)$$

若注意  $Q(u)$  连续, 则可得

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\Delta(s, h) - I}{h} = -Dq(s), \quad (3.5)$$

在  $s \in [0, b]$  上一致成立,  $0 \leq b < \infty$ . 事实上,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{h} (e^{\int_s^{s+h} q_{i,i}(u) du} - 1 - q_{i,i}(s)h) \right| \\ & \leq \left| \frac{1}{h} \left[ \int_s^{s+h} q_{i,i}(u) du - q_{i,i}(s)h \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \left( \int_s^{s+h} q_{i,i}(u) du \right)^k \right] \right|, \end{aligned}$$

所以, 若令  $M_i = \sup_{s \in [0, b+1]} |q_{i,i}(s)|$ , 则有

$$\begin{aligned}
& \limsup_{h \rightarrow 0+} \sup_{s \in [0, b]} \left| \frac{1}{h} \left( e^{\int_s^{s+h} q_{i,i}(u) du} - 1 - q_{i,i}(s)h \right) \right| \\
& \leq \limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{1}{h} \sup_{s \in [0, b]} \left\{ \left| \int_s^{s+h} q_{i,i}(u) du - q_{i,i}(s)h \right| \right. \\
& \quad \left. + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(M_i h)^k}{k!} \right\} \\
& \leq \limsup_{h \rightarrow 0+} \sup_{s \in [0, b]} \left\{ |q_{i,i}(s+\theta h) - q_{i,i}(s)| \right. \\
& \quad \left. + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{M_i^k h^{k-1}}{k!} \right\},
\end{aligned}$$

其中  $0 \leq \theta \leq 1$ , 所以由  $q_{i,i}(s)$  之连续性得知 (3.5) 对  $s \in [0, b]$  一致成立.

令

$$\begin{aligned}
m_{i,j}(s, h) &= e'_i \left( \frac{1}{h} \int_0^h \Delta(s, \alpha) S(s+\alpha) \bar{P}(s+\alpha, s+h) d\alpha \right) e_j, \\
M(s, h) &= (m_{i,j}(s, h), \quad i, j \in E), \\
s_{i,j}(s) &= e'_i S(s) e_j,
\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}
& \sup_{s \in [0, b]} |m_{i,j}(s, h) - s_{i,j}(s)| \\
&= \sup_{s \in [0, b]} \left| \frac{1}{h} \int_0^h \left[ e^{\int_s^{s+\alpha} q_{i,i}(u) du} \sum_{k \in E} s_{i,k}(s+\alpha) \bar{p}_{k,j}(s+\alpha, s+h) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - s_{i,j}(s) \right] d\alpha \right| \\
&\leq \sup_{\substack{0 \leq \alpha \leq h \\ s \in [0, b]}} \left| \sum_{k \in E} e^{\int_s^{s+\alpha} q_{i,i}(u) du} s_{i,k}(s) \bar{p}_{k,j}(s+\alpha, s+h) \right. \\
& \quad \left. - s_{i,j}(s) \right| \\
& \quad + \sup_{\substack{0 \leq \alpha \leq h \\ s \in [0, b]}} \left| \sum_{k \in E} e^{\int_s^{s+\alpha} q_{i,i}(u) du} (s_{i,k}(s+\alpha) \right.
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& -s_{i,k}(s))\bar{p}_{k,j}(s+\alpha, s+h) \Big| \\
& = \sup_{\substack{0 \leq \alpha \leq h \\ s \in [0, b]}} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} s_{i,k}(s) \left( e^{\int_s^{s+\alpha} q_{i,j}(u) du} - \bar{p}_{k,j}(s+\alpha, s+h) - \delta_{k,j} \right) \right| \\
& \quad + \sup_{\substack{0 \leq \alpha \leq h \\ s \in [0, b]}} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{\int_s^{s+\alpha} q_{i,j}(u) du} (s_{i,k}(s+\alpha) \right. \\
& \quad \left. - s_{i,k}(s))\bar{p}_{k,j}(s+\alpha, s+h) \right|. \tag{3.6}
\end{aligned}$$

现在我们来估计 (3.6) 右边两项. 令第一项为  $\eta_{i,j}^{(1)}(h)$ , 第二项为  $\eta_{i,j}^{(2)}(h)$ . 若注意  $q_{i,j}(s)$  在  $s \geq 0$  上连续,  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} s_{i,k}(s) \leq -q_{i,j}(s)$  及  $\bar{p}_{i,j}(s, t)$  满足定义 1.1 中的 (3)、(3)'、(3)"、(3)'" , 则可知: 对任何大于  $j$  的整数  $N$ , 有

$$\begin{aligned}
& \limsup_{h \rightarrow 0+} \eta_{i,j}^{(1)}(h) \\
& \leq \limsup_{h \rightarrow 0+} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{\substack{0 \leq \alpha \leq h \\ s \in [0, b]}} s_{i,k}(s) \left| e^{\int_s^{s+\alpha} q_{i,j}(u) du} - \bar{p}_{k,j}(s+\alpha, s+h) - \delta_{k,j} \right| \\
& \quad + \limsup_{h \rightarrow 0+} \sup_{\substack{0 \leq \alpha \leq h \\ s \in [0, b]}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} s_{i,k}(s) \\
& = \limsup_{h \rightarrow 0+} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{\substack{0 \leq \alpha \leq h \\ s \in [0, b]}} s_{i,k}(s) \left| \bar{p}_{k,j}(s+\alpha, s+h) - \delta_{k,j} \right| \\
& \quad + \sup_{s \in [0, b]} \sum_{k \in \mathbb{Z}} s_{i,k}(s) \\
& \leq \limsup_{h \rightarrow 0+} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{\substack{0 \leq \alpha \leq h \\ s \in [0, b+1]}} s_{i,k}(s) \left| \bar{p}_{k,j}(s+\alpha, s+h) - \delta_{k,j} \right| \\
& \quad + \sup_{s \in [0, b]} \sum_{k \in \mathbb{Z}} s_{i,k}(s) = \sup_{s \in [0, b]} \sum_{k \in \mathbb{Z}} s_{i,k}(s).
\end{aligned}$$

(上式对任何正整数  $N > j$  均成立), 又因为  $s_{i,k}(s)$  在  $s \in [0, b]$  上连

续,  $s_{i,h}(s) \geq 0$ , ( $s \in [0, b]$ ), 而且  $\sum_{k \in \mathbb{N}} s_{i,h}(s)$  也是连续函数, 所以, 由迪尼定理得知:  $\sum_{k \in \mathbb{N}} s_{i,k}(s)$  在  $[0, b]$  上一致收敛, 从而

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{s \in [0, b]} \sum_{k > N} s_{i,k}(s) = 0.$$

综上所述, 我们证明了:

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \eta_{i,j}^{(1)}(h) = 0. \quad (3.7)$$

而

$$\begin{aligned} & \limsup_{h \rightarrow 0+} \eta_{i,j}^{(2)}(h) \\ & \leq \limsup_{h \rightarrow 0+} \sup_{\substack{0 \leq \alpha \leq h \\ s \in [0, b]}} \left| \sum_{k \in \mathbb{N}} e^{\int_s^{s+\alpha} q_{i,j}(u) du} (s_{i,h}(s+\alpha) - s_{i,h}(s)) \right. \\ & \quad \left. - \bar{p}_{k,i}(s+\alpha, s+h) \right| \\ & \quad + \limsup_{h \rightarrow 0+} \sup_{\substack{0 \leq \alpha \leq h \\ s \in [0, b]}} \sum_{k \in \mathbb{N}} (s_{i,h}(s+\alpha) + s_{i,h}(s)) \end{aligned}$$

仿(3.7)可证

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \eta_{i,j}^{(2)}(h) = 0. \quad (3.8)$$

由(3.6)——(3.8)得:

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \sup_{s \in [0, b]} |m_{i,j}(s, h) - s_{i,j}(s)| = 0, \quad (3.9)$$

亦即

$$\lim_{h \rightarrow 0+} M(s, h) = S(s) \quad (\text{在 } s \in [0, b] \text{ 上一致}), \quad (3.10)$$

由(3.4)、(3.5)、(3.10)得

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{1}{h} (\bar{P}(s, s+h) - \bar{P}(s, s)) = Q(s), \quad \text{在 } s \in [0, b]$$

上一致成立. 定理3.1证毕.

**定理3.2.** 设 $Q(t)$ 是一个连续的保守的非时齐的转强阵,则对任何一个 $Q$ -过程 $P(s, t)$ 来说, 均有

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial s} P(s, t) = -Q(s)P(s, t), \quad (0 \leq s \leq t < \infty),$$

(B)

而且 $\frac{\partial}{\partial s} P(s, t)$ 当 $t$ 固定时对 $s$ 而言在 $[0, t]$ 上连续;

$$(2) \quad P(s, s+t) = \int_0^t \Delta(s, \alpha) S(s+\alpha) P(s+\alpha, s+t) d\alpha + \Delta(s, t).$$

(B)'

**证**(1) (a) 首先证明:

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{1}{h} (P(s, t) - P(s-h, t)) = -Q(s)P(s, t),$$

$$(0 < s \leq t < \infty).$$

事实上,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} (p_{i,j}(s, t) - p_{i,j}(s-h, t)) \\ &= \frac{1}{h} (1 - p_{i,i}(s-h, s)) p_{i,j}(s, t) \\ & \quad - \sum_{k \neq i} \frac{1}{h} p_{i,k}(s-h, s) p_{k,j}(s, t), \end{aligned} \quad (3.11)$$

由法都引理有

$$\liminf_{h \rightarrow 0+} \sum_{k \neq i} \frac{1}{h} p_{i,k}(s-h, s) \geq \sum_{k \neq i} q_{i,k}(s),$$

(3.12)

所以由 $Q(t)$ 的保守性得

$$\begin{aligned} & \limsup_{h \rightarrow 0+} \sum_{k \in E} \frac{q_{i,k} - p_{i,k}(s-h, s)}{h} \leq -q_{i,i}(s) - \sum_{k \neq i} q_{i,k}(s) \\ &= 0, \end{aligned}$$

但是

$$\sum_{h \in E} \frac{1}{h} (\delta_{i,h} - p_{i,h}(s-h, s)) \geq 0,$$

因此

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \sum_{h \in E} \frac{1}{h} (\delta_{i,h} - p_{i,h}(s-h, s)) = - \sum_{h \in E} q_{i,h}(s) = 0,$$

更有

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \sum_{h \approx i} \frac{1}{h} p_{i,h}(s-h, s) = \sum_{h \approx i} q_{i,h}(s). \quad (3.13)$$

所以

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{h \approx i} \frac{1}{h} p_{i,h}(s-h, s) p_{h,j}(s, t) - \sum_{h \approx i} q_{i,h}(s) p_{h,j}(s, t) \right| \\ & \leq \left| \sum_{\substack{h \approx i \\ h < N}} \left( \frac{p_{i,h}(s-h, s)}{h} - q_{i,h}(s) \right) p_{h,j}(s, t) \right| \\ & \quad + \sum_{\substack{h \approx i \\ h > N}} \frac{p_{i,h}(s-h, s)}{h} + \sum_{\substack{h \approx i \\ h > N}} q_{i,h}(s). \end{aligned} \quad (3.14)$$

由(3.13)、 $\sum_{h \approx i} q_{i,h}(s) < \infty$  及

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{1}{h} q_{i,h}(s-h, s) = q_{i,h}(s), \quad (i \neq h)$$

得知：任给  $\varepsilon > 0$ ，均存在一个  $N$ ，使  $h$  充分接近于 0 以后，(3.14) 右端第二项与第三项之和小于  $\varepsilon$ 。  $N$  取定后，再在 (3.14) 中令  $h \rightarrow 0+$  得：

$$\begin{aligned} & \limsup_{h \rightarrow 0+} \left| \sum_{h \approx i} \frac{1}{h} p_{i,h}(s-h, s) p_{h,j}(s, t) \right. \\ & \quad \left. - \sum_{h \approx i} q_{i,h}(s) p_{h,j}(s, t) \right| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

由  $\varepsilon > 0$  可任意小得知

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \sum_{h \approx i} \frac{1}{h} p_{i,h}(s-h, s) p_{h,j}(s, t)$$

$$= \sum_{k \neq i} q_{i,k}(s) p_{k,j}(s, t). \quad (3.15)$$

由(3.11)、(3.15)得(a)。

(b) 其次我们证明

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} (P(s+h, t) - P(s, t)) = -Q(s)P(s, t),$$

$$(0 \leq s < t < \infty).$$

考虑  $h > 0$ ,  $0 \leq s < s+h \leq t < \infty$ ,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} (p_{i,j}(s+h, t) - p_{i,j}(s, t)) \\ &= \frac{1 - p_{i,i}(s, s+h)}{h} p_{i,j}(s+h, t) \\ &= \sum_{k \neq i} \frac{p_{i,k}(s, s+h)}{h} p_{k,j}(s+h, t). \end{aligned} \quad (3.16)$$

由法都引理得:

$$\liminf_{h \rightarrow 0^+} \sum_{k \neq i} \frac{p_{i,k}(s, s+h)}{h} \geq \sum_{k \neq i} q_{i,k}(s), \quad (3.17)$$

所以

$$\liminf_{h \rightarrow 0^+} \sum_{k \in E} \frac{p_{i,k}(s, s+h) - \delta_{i,k}}{h} \geq \sum_{k \in E} q_{i,k}(s) = 0.$$

但是

$$\sum_{k \in E} \frac{1}{h} (p_{i,k}(s, s+h) - \delta_{i,k}) \leq 0,$$

所以

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \sum_{k \in E} \frac{p_{i,k}(s, s+h) - \delta_{i,k}}{h} = \sum_{k \in E} q_{i,k}(s) = 0,$$

更有

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \sum_{k \neq i} \frac{p_{i,k}(s, s+h)}{h} = \sum_{k \neq i} q_{i,k}(s). \quad (3.18)$$

但是

$$\begin{aligned} \limsup_{h \rightarrow 0+} \left| \sum_{k \neq i} \frac{p_{i,k}(s, s+h)}{h} - p_{k,j}(s+h, t) \right. \\ \left. - \sum_{k \neq i} q_{i,k}(s) p_{k,j}(s, t) \right| \leq \limsup_{h \rightarrow 0+} \left| \sum_{k \neq i} \left( \frac{p_{i,k}(s, s+h)}{h} \right. \right. \\ \left. \left. - q_{i,k}(s) \right) p_{k,j}(s+h, t) \right| + \limsup_{h \rightarrow 0+} \left| \sum_{k \neq i} q_{i,k}(s) \right. \\ \left. \cdot (p_{k,j}(s+h, t) - p_{k,j}(s, t)) \right|, \quad (3.19) \end{aligned}$$

由定理1.2及  $\sum_{k \neq i} q_{i,k}(s) \leq -q_{i,i}(s) < \infty$ , 并应用控制收敛定理即得:

$$\limsup_{h \rightarrow 0+} \left| \sum_{k \neq i} q_{i,k}(s) (p_{k,j}(s+h, t) - p_{k,j}(s, t)) \right| = 0. \quad (3.20)$$

由(3.18)得知: 对任何 $n$ , 均存在 $N_n, \delta_n > 0$ , 使得 $h < \delta_n$ 时有

$$\sum_{\substack{k \neq i \\ k \geq N_n}} \frac{p_{i,k}(s, s+h)}{h} < \frac{1}{n}, \quad \sum_{\substack{k \neq i \\ k \geq N_n}} q_{i,k}(s) < \frac{1}{n}.$$

所以, 当 $h < \delta_n$ 时有

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k \neq i} \left( \frac{p_{i,k}(s, s+h)}{h} - q_{i,k}(s) \right) p_{k,j}(s+h, t) \right| \\ & \leq \left| \sum_{\substack{k \neq i \\ k \geq N_n}} \left( \frac{p_{i,k}(s, s+h)}{h} - q_{i,k}(s) \right) p_{k,j}(s+h, t) \right| + \frac{2}{n}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

在(3.21)中先令 $h \rightarrow 0+$ , 次令 $n \rightarrow \infty$ 即得:

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \sum_{k \neq i} \left( \frac{p_{i,k}(s, s+h)}{h} - q_{i,k}(s) \right) p_{k,j}(s+h, t) = 0. \quad (3.22)$$

由(3.19)、(3.20)、(3.22)得:

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0+} \sum_{k \neq i} \frac{p_{i,k}(s) \frac{s+h}{h}}{h} p_{k,j}(s+h, t) \\ &= \sum_{k \neq i} q_{i,k}(s) p_{k,j}(s, t). \end{aligned} \quad (3.23)$$

由定理1.2及(3.16)、(3.23)得:

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{P(s+h, t) - P(s, t)}{h} = -Q(s)P(s, t).$$

(c) 最后我们证明:  $\frac{\partial}{\partial s} P(s, t)$  当  $t$  固定时对  $s$  在  $[0, t]$  上连续.

若注意(a)、(b)及定理1.2和  $Q(s)$  对  $s$  连续, 为证(c), 只须证明

$\sum_{k \neq i} q_{i,k}(s) p_{k,j}(s, t)$  当  $t$  固定时对  $s$  在  $[0, t]$  上连续 ( $i, j \in E$ ). 事实上,

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k \neq i} q_{i,k}(s) p_{k,j}(s, t) - \sum_{k \neq i} q_{i,k}(s-h) p_{k,j}(s-h, t) \right| \\ & \leq \left| \sum_{k \neq i} q_{i,k}(s) (p_{k,j}(s, t) - p_{k,j}(s-h, t)) \right| \\ & + \left| \sum_{k \neq i} (q_{i,k}(s) - q_{i,k}(s-h)) p_{k,j}(s-h, t) \right|. \quad (3.24) \end{aligned}$$

由定理1.2及控制收敛定理得知(3.24)右端第一项当  $h \rightarrow 0$  (当  $s=0$  时自然要求  $h \leq 0$ ) 时趋于0. 而第二项小于等于  $\sum_{k \neq i} |q_{i,k}(s) - q_{i,k}(s-h)|$ .

又

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k \neq i} q_{i,k}(s-h) = - \lim_{h \rightarrow 0} q_{i,i}(s-h) = -q_{i,i}(s) \\ &= \sum_{k \neq i} q_{i,k}(s) < \infty, \end{aligned}$$

所以, 对任何 $n$ , 均存在 $N_n$ 及 $\delta_n > 0$ , 使 $|h| < \delta_n$ 时有

$$\sum_{\substack{h \neq i \\ h > N_n}} \left| q_{i,h}(s) - q_{i,h}(s-h) \right| < \frac{1}{n}. \quad (3.25)$$

所以当 $|h| < \delta_n$ 时有:

$$\begin{aligned} & \sum_{h \neq i} \left| q_{i,h}(s) - q_{i,h}(s-h) \right| \\ & \leq \sum_{\substack{h \neq i \\ h > N_n}} \left| q_{i,h}(s) - q_{i,h}(s-h) \right| + \frac{1}{n}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

在(3.26)中先令 $h \rightarrow 0$ , 次令 $n \rightarrow \infty$ 并注意 $q_{i,j}(s)$ 对 $s$ 的连续性即得:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{h \neq i} \left| q_{i,h}(s) - q_{i,h}(s-h) \right| = 0. \quad (3.27)$$

综上所述, 我们证明了:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \sum_{h \neq i} q_{i,h}(s) p_{h,j}(s, t) - \sum_{h \neq i} q_{i,h}(s-h) p_{h,j}(s-h, t) \right| = 0.$$

亦即(c)得证。(1)证毕。

(2) 最后证明 $P(s, t)$ 满足(B)'. 事实上, 利用(1)及分部积分可得:

$$\begin{aligned} & \int_0^t \Delta(s, \alpha) S(s+\alpha) P(s+\alpha, s+t) d\alpha \\ &= \int_0^t \Delta(s, \alpha) [-Q(s+\alpha) P(s+\alpha, s+t) + D_{q(s+\alpha)} P(s \\ & \quad + \alpha, s+t)] d\alpha \\ &= - \int_s^{s+t} \Delta(s, \alpha-s) \frac{\partial}{\partial \alpha} P(\alpha, s+t) d\alpha \\ & \quad + \int_0^t \Delta(s, \alpha) D_{q(s+\alpha)} P(s+\alpha, s+t) d\alpha \\ &= - [\Delta(s, t) P(s+t, s+t) - \Delta(s, 0) P(s, s+t) \\ & \quad + \int_s^{s+t} D_{q(\alpha)} \Delta(s, \alpha-s) P(\alpha, s+t) d\alpha] \end{aligned}$$



$$+ \int_0^t \Delta(s, \alpha) D_{q(s+\alpha)} P(s+\alpha, s+t) d\alpha \\ = -\Delta(s, t) + P(s, s+t).$$

定理3.2证毕.

引理3.1. 设  $Q(t) = (q_{i,j}(t))$ ,  $i, j \in E$  是任一连续的非时齐的转强阵,  $P(s, t) = (p_{i,j}(s, t))$ ,  $i, j \in E$  是任一  $Q$ -过程, 则

$$p_{i,i}(s, t) \geq e^{\int_s^t q_{i,i}(u) du}, \quad (i \in E, 0 \leq s \leq t < \infty). \quad (3.28)$$

证 因为

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{1}{h} (1 - p_{i,i}(t-h, t)) = -q_{i,i}(t)$$

对  $t \in (0, b]$  一致成立. 所以存在  $\varepsilon_i(h)$  (不依赖于  $t \in (0, b]$ ), 使

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \varepsilon_i(h) = 0, \quad |1 - p_{i,i}(t-h, t) + h q_{i,i}(t)| < \varepsilon_i(h)h.$$

特别地, 取  $\tau = t - s$  就有

$$p_{i,i}\left(s + \frac{j-1}{n}\tau, s + \frac{j}{n}\tau\right) \geq 1 + q_{i,i}\left(s + \frac{j}{n}\tau\right) \frac{\tau}{n} \\ - \varepsilon_i\left(\frac{\tau}{n}\right) \frac{\tau}{n}, \quad (1 \leq j \leq n).$$

所以 (因  $q_{i,i}(s)$  连续,  $\varepsilon_i(h) \rightarrow 0$ , ( $h \rightarrow 0$  时)), 故  $n$  充分大后上式右端非负),

$$p_{i,i}(s, t) \geq \prod_{j=1}^n p_{i,i}\left(s + \frac{j-1}{n}\tau, s + \frac{j}{n}\tau\right) \\ \geq \prod_{j=1}^n \left(1 + q_{i,i}\left(s + \frac{j}{n}\tau\right) \frac{\tau}{n} - \varepsilon_i\left(\frac{\tau}{n}\right) \frac{\tau}{n}\right). \quad (3.29)$$

在 (3.29) 中令  $n \rightarrow \infty$  即得 (3.28). 事实上, 若令  $M_i = \sup_{u \in [s, t]} |q_{i,i}(u)|$ , 则

$$e^{q_{i,i}\left(\frac{j}{n}\tau\right) \frac{\tau}{n}} \leq 1 + q_{i,i}\left(\frac{j}{n}\tau\right) \frac{\tau}{n} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\left|q_{i,i}\left(\frac{j}{n}\tau\right) \frac{\tau}{n}\right|^k}{k!}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 1 + q_{i,i} \left( \frac{j}{n} \tau \right) \frac{\tau}{n} + M_i \frac{\tau}{n} \left( e^{\left| q_{i,i} \left( \frac{j}{n} \tau \right) \frac{\tau}{n} \right|} - 1 \right) \\
&\leq 1 + q_{i,i} \left( \frac{j}{n} \tau \right) \frac{\tau}{n} + M_i \frac{\tau}{n} \left( e^{M_i \tau / n} - 1 \right) \\
&\leq 1 + q_{i,i} \left( \frac{j}{n} \tau \right) \frac{\tau}{n} + \eta_i \left( \frac{\tau}{n} \right) \frac{\tau}{n},
\end{aligned} \tag{3.30}$$

其中  $\eta_i \left( \frac{\tau}{n} \right) \geq 0$  不依赖  $j$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_i \left( \frac{\tau}{n} \right) = 0$ .

由(3.29)、(3.30)得:

$$p_{i,i}(s, t) \geq \prod_{j=1}^n \left\{ e^{q_{i,i} \left( \frac{j}{n} \tau \right) \frac{\tau}{n}} - \left[ \varepsilon_i \left( \frac{\tau}{n} \right) + \eta_i \left( \frac{\tau}{n} \right) \right] \frac{\tau}{n} \right\},$$

所以, 由  $q_{i,i}(u)$  对  $u$  连续, 在上式中令  $n \rightarrow \infty$  即得(3.28).

**定理3.3.** 设  $Q(t)$  是一个连续的保守的非时齐的转强阵, 则定理3.1中构造出来的  $Q$ -过程  $\bar{P}(s, t)$  是最小的  $Q$ -过程, 即是说, 对任何  $Q$ -过程  $P(s, t)$ , 恒有

$$P(s, t) \geq \bar{P}(s, t).$$

**证** 设  $P_n(s, t)$ 、 $\bar{P}(s, t)$  如定理3.1所定义. 由引理3.1有  $P(s, t) \geq P_0(s, t)$ .

若  $P(s, t) \geq \sum_{v=0}^n P_v(s, t)$ , 则由定理3.2有

$$\begin{aligned}
P(s, s+t) &= \int_0^t \Delta(s, \alpha) S(s+\alpha) P(s+\alpha, s+t) d\alpha + \Delta(s, t) \\
&\geq \Delta(s, t) + \int_0^t \Delta(s, \alpha) S(s+\alpha) \sum_{v=0}^n P_v(s+\alpha, s+t) d\alpha \\
&= \sum_{v=0}^{n+1} P_v(s, s+t), \quad (0 \leq s, t < \infty).
\end{aligned}$$

所以, 对任何  $n$ , 都有  $P(s, t) \geq \sum_{v=0}^n P_v(s, t)$ .

令  $n \rightarrow \infty$  即得定理3.3.

#### § 4. 非时齐的 $Q$ -过程的唯一性.

设  $P(s, t)$  是一个非时齐的准转概阵. 由定理1.2, 当  $s$  固定时,  $P(s, t)$  在  $t \in [s, \infty)$  上右连续, 所以可以考虑  $P(s, t)$  的拉氏变换如下:

$$R(\lambda, s) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P(s, s+t) dt, \quad (\lambda > 0, s \geq 0). \quad (4.1)$$

设  $P_n(s, t)$ ,  $\bar{P}(s, t)$ ,  $\Delta(s, \alpha)$ ,  $S(s)$  如定理3.1所定义, 令

$$R_n(\lambda, s) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_n(s, s+t) dt, \quad (\lambda > 0, s \geq 0), \quad (4.2)$$

$$\bar{R}(\lambda, s) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \bar{P}(s, s+t) dt, \quad (\lambda > 0, s \geq 0). \quad (4.3)$$

**引理4.1.** 恒有

$$(1) \quad R_{n+1}(\lambda, s) = \int_0^\infty e^{-\lambda \alpha} \Delta(s, \alpha) S(s+\alpha) R_n(\lambda, s+\alpha) d\alpha, \\ (n \geq 0)$$

$$(2) \quad \bar{R}(\lambda, s) = R_0(\lambda, s) + \int_0^\infty e^{-\lambda \alpha} \Delta(s, \alpha) S(s+\alpha) \bar{R}(\lambda, s+\alpha) d\alpha.$$

$$\begin{aligned} \text{证} \quad R_{n+1}(\lambda, s) &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_{n+1}(s, s+t) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \int_0^t \Delta(s, \alpha) S(s+\alpha) P_n(s+\alpha, s+t) d\alpha dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda \alpha} \left[ \int_0^\infty e^{-\lambda t} \Delta(s, \alpha) S(s+\alpha) P_n(s+\alpha, s+\alpha+t) dt \right] d\alpha \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda \alpha} \Delta(s, \alpha) S(s+\alpha) R_n(\lambda, s+\alpha) d\alpha. \end{aligned}$$

(1) 得证. 若注意上式右端被积函数非负, 则把上式对  $n$  从 0 到  $\infty$  求和即得 (2).

**引理4.2.** 设  $R(\lambda, s)$  是非时齐的准转概阵  $P(s, t)$  的拉氏变换, 则  $P(s, t)$  是转概阵的充要条件是  $\lambda R(\lambda, s) \mathbf{1} \equiv \mathbf{1}$ .

**证** 必要性显然成立. 往证充分性. 若  $\lambda R(\lambda, s) \mathbf{1} \equiv \mathbf{1}$ , 则

$$\int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} (1 - P(s, s+t)1) dt = 0,$$

但是, 由定理1.2知:  $1 - P(s, s+t)1$  对  $t$  右连续, 所以, 由拉氏变换的唯一性(参看[68]P.46)得知

$$1 - P(s, s+t)1 \equiv 0.$$

**引理4.3.** 设  $P(s, t)$  是一个满足  $(B)'$  的  $Q$ -过程, 则其拉氏变换  $R(\lambda, s)$  满足

$$R(\lambda, s) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda a} \Delta(s, a) [S(s+a)R(\lambda, s+a) + I] da, \quad (B_1)$$

其中  $\lambda > 0, s \geq 0$ .

**证** 由  $(B)'$  有

$$\begin{aligned} R(\lambda, s) &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \left[ \int_0^t \Delta(s, a) S(s+a) P(s+a, s+t) da \right. \\ &\quad \left. + \Delta(s, t) \right] dt \\ &= \int_0^{\infty} \left[ \int_a^{\infty} e^{-\lambda t} \Delta(s, a) S(s+a) P(s+a, s+t) dt \right] da \\ &\quad + \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \Delta(s, t) dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda a} \Delta(s, a) S(s+a) \left[ \int_a^{\infty} e^{-\lambda t} P(s+a, s+a+t) dt \right] da \\ &\quad + \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \Delta(s, t) dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda a} \Delta(s, a) (S(s+a)R(\lambda, s+a) + I) da. \end{aligned}$$

**定理4.1.** 设  $Q(t)$  是一个连续的保守的非时齐的转强阵, 则

$$\bar{y}(\lambda, s) \equiv 1 - \lambda \bar{R}(\lambda, s)1, \quad (\lambda > 0, s \geq 0)$$

是

$$\begin{cases} y(\lambda, s) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda a} \Delta(s, a) S(s+a) y(\lambda, s+a) da, \\ y(\lambda, \cdot) \in \mathcal{X}, \end{cases} \quad (\lambda > 0, s \geq 0)$$

的最大解, 其中  $y(\lambda, \cdot)$  表示  $\lambda$  固定,  $y(\lambda, s)$  考虑成  $s$  的函数,

函数  $\mathscr{X} = \left\{ y(s) \left| y(s) = \begin{pmatrix} y_0(s) \\ y_1(s) \\ \vdots \end{pmatrix}, 0 \leq y_i \leq 1, y_i \text{ 是勒贝格可测函数} \right. \right\}.$

证 首先我们证明

$$\mathbf{1} - \lambda R_0(\lambda, s) \mathbf{1} - \int_0^\infty e^{-\lambda \alpha} \Delta(s, \alpha) S(s + \alpha) \mathbf{1} d\alpha = 0. \quad (4.4)$$

事实上, (4.4) 左边之列向量对应于  $i$  的分量为

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \left[ \lambda e^{-\lambda \alpha} - \lambda \exp \left( -\lambda \alpha + \int_s^{s+\alpha} q_{i,i}(u) du \right) \right. \\ & \quad \left. + q_{i,i}(s + \alpha) \exp \left( -\lambda \alpha + \int_s^{s+\alpha} q_{i,i}(u) du \right) \right] d\alpha \\ &= \int_0^\infty \left[ \lambda e^{-\lambda \alpha} - (\lambda - q_{i,i}(s + \alpha)) \exp \left( -\int_s^{s+\alpha} (\lambda - q_{i,i}(u)) du \right) \right] d\alpha \\ &= 1 + \int_0^\infty d \left[ \exp \left( -\int_s^{s+\alpha} (\lambda - q_{i,i}(u)) du \right) \right] = 0. \end{aligned}$$

所以, 由 (4.4) 及引理 4.1 得:

$$\begin{aligned} \bar{y}(\lambda, s) &= \mathbf{1} - \lambda \bar{R}(\lambda, s) \mathbf{1} \\ &= \mathbf{1} - \lambda R_0(\lambda, s) \mathbf{1} \\ &\quad - \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda \alpha} \Delta(s, \alpha) S(s + \alpha) \bar{R}(\lambda, s + \alpha) \mathbf{1} d\alpha \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda \alpha} \Delta(s, \alpha) S(s + \alpha) \mathbf{1} d\alpha \\ &\quad - \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda \alpha} \Delta(s, \alpha) S(s + \alpha) \bar{R}(\lambda, s + \alpha) \mathbf{1} d\alpha \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda \alpha} \Delta(s, \alpha) S(s + \alpha) \bar{y}(\lambda, s + \alpha) d\alpha. \end{aligned}$$

显然  $\bar{y}(\lambda, \cdot) \in \mathscr{X}$ ,  $(\lambda > 0)$ . 若  $y(\lambda, \cdot) \in \mathscr{X}$ ,  $(\lambda > 0)$ ,  $y(\lambda, \cdot)$  满足

$$y(\lambda, s) = \int_0^\infty e^{-\lambda\alpha} \Delta(s, \alpha) S(s+\alpha) y(\lambda, s+\alpha) d\alpha, \\ (\lambda > 0, s \geq 0),$$

则由(4.4)得

$$y(\lambda, s) = 1 - \lambda R_0(\lambda, s) 1 \\ + \int_0^\infty e^{-\lambda\alpha} \Delta(s, \alpha) S(s+\alpha) (y(\lambda, s+\alpha) - 1) d\alpha \\ \leq 1 - \lambda R_0(\lambda, s) 1.$$

设  $y(\lambda, s) \leq 1 - \lambda \sum_{k=0}^n R_k(\lambda, s) 1$ , 则由引理4.1有

$$y(\lambda, s) \leq 1 - \lambda R_0(\lambda, s) 1 \\ - \int_0^\infty e^{-\lambda\alpha} \Delta(s, \alpha) S(s+\alpha) \sum_{k=0}^n \lambda R_k(\lambda, s+\alpha) 1 d\alpha \\ = 1 - \lambda \sum_{k=0}^{n+1} R_k(\lambda, s) 1.$$

所以

$$y(\lambda, s) \leq 1 - \lambda \sum_{k=0}^{\infty} R_k(\lambda, s) 1 = \bar{y}(\lambda, s).$$

定理证毕.

**定理4.2.** 设  $Q(t)$  是一个连续的保守的非时齐的转强阵, 则恰有唯一一个  $Q$ -过程且不断的充要条件是:

$$\begin{cases} y(\lambda, s) = \int_0^\infty e^{-\lambda\alpha} \Delta(s, \alpha) S(s+\alpha) y(\lambda, s+\alpha) d\alpha, \\ y(\lambda, \cdot) \in \mathcal{X} \end{cases} \quad (\lambda > 0, s \geq 0)$$

只有零解.

**证** 由引理4.2及定理4.1即得定理4.2.

## 参 考 文 献

- [1] K. L. Chung, Markov Chains with Stationary Transition Probabilities, Springer-Verlag, 1960.
- [2] J. G. Kemeny, J. L. Snell, A. W. Knapp, Denumerable Markov Chains, Springer-Verlag, 1976, (Second edition).
- [3] M. L. Silverstein, Symmetric Markov Processes, Springer-Verlag, 1974.
- [4] D. L. Isaacson, R. W. Madson, Markov Chains Theory and Applications, New york, 1976.
- [5] F. Spitzer, Principles of Random Walk, Princeton, New Jersey, 1964.
- [6] Т. А. Сарымсаков, Основы Теорий Процессов Маркова, Москва, 1954.
- [7] Е. Б. Дынкин, Марковские Процессы, Москва, 1963.
- [8] Е. Б. Дынкин, 马尔可夫过程论基础, 科学出版社, 北京, 1962. (王梓坤译).
- [9] Е. Б. Дынкин, Граничная Теория для Марковских Процессов. (Дискретный Случай), У. М. Н., 24, вып. 2 (146), 1969, 3—42.
- [10] J. L. Doob, Stochastic Processes, New york, 1953.
- [11] J. L. Doob, Markov Chains — Denumerable Case, Tran. Amer. Math. Soc., 58(1945), 455—473.
- [12] J. L. Doob, Discrete Potential Theory and Boundaries, J. of Math. and Mech., 8:3 (1959), 433—458.
- [13] 王梓坤, 随机过程论, 科学出版社, 北京, 1965.
- [14] 王梓坤, On Distribution of Functions of Birth and Death Processes and Their Applications in the Theory of Queues,

Scientia Sinica (中国科学), X:2(1961), 160—170.

[15] 王梓坤, The Martin Boundary and Limit Theorems for Excessive Functions, Scientia Sinica (中国科学), XIV:8 (1965), 1118—1129.

[16] 王梓坤, 生灭过程与马尔科夫链, 科学出版社, 北京, 1980.

[17] 王梓坤, 生灭过程的遍历性与零一律, 南开大学学报 (自然科学), 5:5(1961), 89—94.

[18] 吴立德, 可数马尔可夫过程状态的分类, 数学学报, 15:1 (1965), 32—41.

[19] 吴立德, 齐次可数马尔可夫过程积分型泛函的分布, 数学学报, 13:1 (1963), 86—93.

[20] 侯振挺, 郭青峰, 齐次可列马尔可夫过程, 科学出版社, 北京, 1978.

[21] 侯振挺, Q过程的唯一性准则, 中国科学, 2(1974), 115—130.

[22] 侯振挺, 郭青峰, 齐次可列马尔可夫过程构造论中的定性理论, 数学学报, 19:4(1976), 239—262.

[23] 侯振挺, 齐次可列马尔可夫过程的样本函数的构造, 中国科学, 3(1975), 259—266.

[24] 钱敏, 侯振挺等, 可逆马尔可夫过程, 湖南科学技术出版社, 长沙, 1979.

[25] 杨超群, 关于生灭过程论的注记, 数学学报, 15:2(1965), 173—187.

[26] 杨超群, 生灭过程的性质, 数学进展, 9:4 (1966), 365—380.

[27] 杨超群, 可列马氏过程的积分型泛函和双边生灭过程的边界性质, 数学进展, 7:4 (1964), 397—424.

[28] 杨向群, 可列马尔可夫过程的W变换和强极限, 中国科学, 7:9 (1979), 835—848.

[29] 杨向群, 一类生灭过程, 数学学报, 15 (1965), 9—31.

[30] 杨向群, 柯氏向后微分方程组的边界条件, 数学学报, 16 (1966), 429—452.



[31] 杨向群, 可列马尔科夫过程构造论, 湖南科学技术出版社, 长沙, 1979.

[32] 刘文, 关于可列齐次马氏链转移概率的强大数定律, 数学学报, 21:3(1978), 231—242.

[33] 许宝騄, 欧氏空间上纯间断的时齐的马尔可夫过程的转移函数的可微性, 北京大学学报 (自然科学版), 4:3(1958), 257—270.

[34] 朱成熹, 非时齐马尔可夫链的转移函数的分析性质, 数学进展, 8:1(1965), 34—54.

[35] 李志罔, 半群与马尔科夫过程齐次转移函数的微分性质, 数学进展, 8:2 (1965), 153—160.

[36] D. G. Kendall, Some Analytical Properties of Continuous Stationary Markov Transition Functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 78(1955), 529—540.

[37] D. G. Austin, On the Existence of Derivatives of Markoff Transition Probability Functions, *proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, 41(1955), 224—226.

[38] S. Karlin, J. L. McGregor, The Differential Equations of Birth and Death Processes and the Stieltjes Moment Problem, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 85(1957), 489—546.

[40] S. Karlin, J. L. McGregor, The Classification of Birth and Death Processes, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 86 (1957), 366—400.

[41] T. E. Harris, *The Theory of Branching Processes*, Springer-Verlag, 1963.

[42] Б. А. Севастьянов, Теория Ветвящихся Случайных Процессов, *У. М. Н.*, 6(1951), 47—99.

[43] Б. А. Севастьянов, Ветвящиеся Случайные Процессы для Частиц, Диффундирующих в Ограниченной Области с Поглощающими Границами, *Теория Веро. и её Примен.*, 3(1958), 121—136.

[44] Б. А. Севастьянов, Переходные Явления в Ветвящихся Случайных Процессы, *Теория Веро. и её Примен.*, 4(1959),

〔45〕 M. Donsker, An Invariance Principle for Certain Probability Limit Theorems, *Memoirs of Amer. Math. Soc.*, No. 6, 1951.

〔46〕 P. Billingsley, The Invariance Principle for Dependent Random Variables, *Tran. Amer. Math. Soc.*, 83 (1956), 250—268.

〔47〕 胡迪鹤, 不变原理及其在分枝过程中的应用, *北京大学学报 (自然科学版)*, 10:1 (1964), 1—27.

〔48〕 胡迪鹤, 可数的马尔可夫过程的构造理论, *北京大学学报 (自然科学版)*, 11:2 (1965), 111—143.

〔49〕 胡迪鹤, 非时齐的可数状态的  $Q$ -过程的存在性及唯一性, *数学学报*, 21:3 (1978), 285—287; 或 *武汉大学学报 (自然科学版)*, 1980, 7—25.

〔50〕 胡迪鹤, 关于某些随机阵的调和函数, *数学学报*, 22:3 (1979), 276—290.

〔51〕 胡迪鹤, 随机调控无穷维分枝过程论 (I), *武汉大学学报 (自然科学版)*, 1978, 第一期1—12.

〔52〕 胡迪鹤, 随机调控无穷维分枝过程论 (II), *武汉大学学报 (自然科学版)*, 1978, 第二期, 8—16.

〔53〕 胡迪鹤, 随机调控分枝过程的退化概率、两极分化及增殖速度, *武汉大学学报 (自然科学版)*, 数学专刊, 1981, 第一期, 53—68.

〔54〕 胡迪鹤, 可逆的马尔可夫核, *武汉大学学报 (自然科学版)*, 数学专刊, 1980年第一期, 63—82.

〔55〕 胡迪鹤, 关于可数状态的马尔可夫过程的遍历极限, *武汉大学学报 (自然科学版)*, 数学专刊, 1980年第一期, 49—62.

〔56〕 胡迪鹤, 马尔可夫链的泛函的极限分布, *武汉大学学报 (自然科学版)*, 1977第三期, 63—79.

〔57〕 G. E. H. Reuter, Denumerable Markov Processes and the Associated Contraction Semigroup on  $l$ , *Acta. Math.*, 97 (1957), 1—46.

〔58〕 G. E. H. Reuter, Denumerable Markov Processes (II),

J. London Math. Soc., 34(1959), 81—91.

[59] G. E. H. Reuter, Denumerable Markov Processes (III).

J. London Math. Soc., 37(1962), 63—73.

[60] D. Isaacson and G. R. Luecke, Strongly Ergodic Markov Chains and Rates of Convergence Using Spectral Conditions, Stochastic Processes and Their Applications, 7 (1978) 113—121.

[61] J. F. C. Kingman, The Exponential Decay of Markov Transition Probabilities, Proc. London Math. Soc., 13(1963), 337—358.

[62] J. F. C. Kingman, Ergodic Properties of Continuous-Time Markov Processes and Their Discrete Skeletons, Proc. London Math. Soc., 13(1963), 593—604.

[63] D. G. Kendall, Unitary Dilations of Markov Transition Operators and The Corresponding Integral Representations for Transition Probability Matrices, In, U. Grenander Ed., Probability and Statistics, New York, 1959.

[64] R. V. Chacon and D. S. Ornstein, A General Ergodic Theorem, Illinois J. Math., 4(1960), 153—160.

[65] A. M. Яглом, The Ergodic Principle for Markov Processes with Stationary Distribution, Д. А. Н. (С. С. С. Р.) 54 (1947), 347—349.

[66] C. E. Rickart, General Theory of Banach Algebras, New York, 1960.

[67] R. Syski, Ergodic Potential, Stochastic Processes and Their Applications, 7(1978), 311—336.

[68] D. V. Widder, The Laplace Transform, Princeton University Press, 1946.

[69] M. Loève, Probability Theory, New York, 1955.

[70] E. Hille, Functional Analysis and Semigroups, New York, 1948.

[71] G. A. Hunt, Markoff Chains and Martin Boundaries.

Illinois J. of Math. and Mech., 8:3(1959), 433—458.

[72] W. Feller, An Introduction to Probability Theory and Its Applications (V. I), New York, 1951.